# COBPEMENHAS MATEMATUKA

к каратеодори

**КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ** 

r · T · T · M



The Box.



### СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

КНИГА ПЯТАЯ

к. каратеодори КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

онти ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

### К. КАРАТЕОДОРИ

## КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

перевод с английского М. КЕЛДЫШ

## CONFORMAL REPRESENTATION

by

## C. CARATHÉODORY, Dr. Phil.

Professor of Mathematics in the University of Munich

CAMBRIDGE AT THE UNIVERSITY PRESS 1932

#### ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга является результатом лекций, читанных мной в течение ряда лет в различных местах (Геттинген, Берлин, Афины, Мюнхен и Гарвардский университет). Она содержит теорию конформных отображений в том виде, в котором эта теория была развита в течение двух последних десятилетий. Первая часть книги посвящена элементарным вопросам, необходимым для понимания общей теории. В трех последних главах дается изложение общей теории, построенное на простейших современных методах.

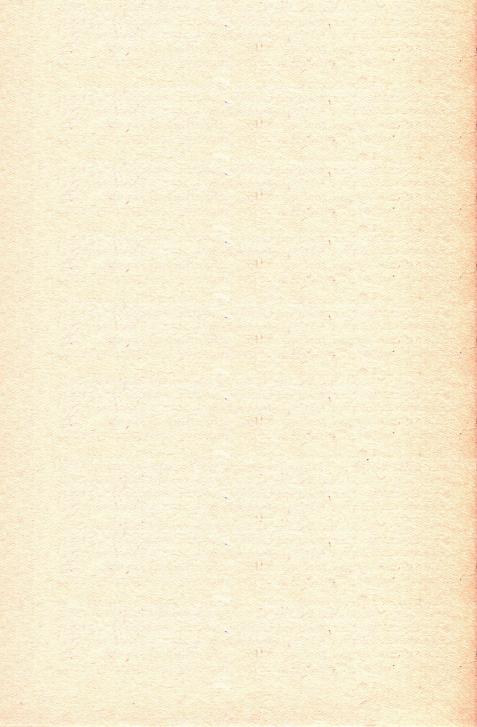
Оригинальная рукопись, написанная на немецком языке, была переведена В. М. Wilson'ом (университет в Ливерпуле) и Miss Margaret Kennedy (Ньюгемский колледж). Я выражаю им глубокую благодарность за внимание, с которым они старались сделать понятными читателю самые сложные рассуждения. Я обязан также проф. Erhard Schmidt (Берлин) и проф. Tibor Rado (Колумбус, Огайо) за различные усовершенствования в математических доказательствах и Miss Margaret Kennedy за отдельные замечания, улучшающие текст. Я должен еще поблагодарить издательство Кембриджского университета (Cambridge University Press) за прекрасное внешнее оформление книги.

Афины. Декабрь 1931 г. C. Carathéodory

#### ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Цифры, стоящие в тексте в круглых скобках, дают сноски на литературу, приведенную автором.

В конце книги помещены примечания, сделанные переводчиком. Указания на них в тексте дают цифры, стоящие в квадратных скобках.



#### исторический обзор

1. Изогональным (сохраняющим углы) преобразованием одной области в другую называется взаимно однозначное, непрерывное и непрерывное и непрерывное преобразование областей, переводящее две кривые первой области, пересекающиеся под углом α, в кривые второй области, пересекающиеся под тем же углом α. Если при этом сохраняется направление вращения углов, изогональное преобразование называется конформным.

Не считая обычного растяжения евклидовой плоскости (преобразования подобия), старейшим преобразованием такого ряда является стереографическая проекция, которая использовалась Птоломеем (вторая четверть второго столетия; умер в 161 г. нашей эры) для изображения небесной сферы на плоскости; это преобразование отображает сферу на плоскость конформно. Совершенно другое конформное отображение сферы на плоскость дается меркаторской проекцией; в этом случае поверхность сферы, разрезанная вдоль меридиана, отображается конформно на плоский прямоугольник. Первая карта, построенная при помощи такого преобразования, была опубликована Мегсатогом (1512—1594) в 1568 г., и с тех пор его метод сделался общепринятым для черчения морских карт.

2. Сравнение карт одной и той же области, полученных стереографической проекцией и проекцией Мегсаtor'а, показывает, что конформное отображение не сводится к простому подобию соответствующих фигур. Другие не тривиальные конформные отображения одной плоской области на другую можно получить, сравнивая различные стереографические проекции сферы, соответствующие разным положениям центра проекций на ее поверхности. Подобными рассмотрениями Lagrange (1736—1813) в 1779 г. получил все конформные отображения участка сферы на плоскую область, при которых меридианы и параллели изображаются круговыми дугами (1).

3. В 1822 г. Gauss (1777—1855) поставил и до конца разрешил задачу о нахождении всех конформных отображений достаточно малой окрестности точки произвольной аналитической поверхности на плоскую область (2). Это сочинение Gauss'а, казалось бы, окончательно разрешает весь этот вопрос в целом; в действительности оно оставляет открытым несравненно более сложный вопрос о конформном отображении конечного участка

поверхности на участок плоскости. Этот вопрос впервые был выдвинут Riemann'ом (1826—1866) в его диссертации (1851), являющейся поворотным пунктом в истории вопроса, определяющим все его дальнейшее развитие. Riemann не только дал идеи, явившиеся основой для всех дальнейших исследований, но также показал, что проблема имеет фундаментальное значение для тео-

рии функций (3).

4. Наряду с другими результатами Riemann высказал теорему о том, что всякую односвязную плоскую область, не совпадающую со всей плоскостью, можно отобразить конформно на внутренность круга. При доказательстве этой теоремы, лежащей в основе всей теории, он принял очевидным существование решения некоторой проблемы вариационного исчисления. Weierstrass (1815—1897) впервые указал на незаконность этого допущения. Совсем простые, аналитические и со всех точек зрения регулярные проблемы вариационного исчисления, как известно теперь, не всегда имеют решение (4). Тем не менее через пятьдесят лет после Riemann'а Hilbert доказал совершенно строго, что специальная проблема, входящая в сочинение Riemann'а, имеет решение; эта теорема носит название принципа Dirichlet (5).

В продолжение этого времени справедливость выводов Riemann'а была подтверждена строгими доказательствами К. Neumann'a и особенно Н. А. Schwarz'a. Теория, созданная Schwarz'eм по этому поводу, чрезвычайно изящна, интересна и поучительна; однако эта теория несколько сложна и основывается на ряде теорем из теории логарифмического потенциала, доказательства которых нарушают целостность метода. В течение последних одного или двух десятилетий в работах различных математиков были созданы новые методы, дающие весьма простое изложение задачи. Цель следующих страниц — дать изложение этих методов,

по возможности сжатое, но достаточно полное.

#### Глава І

#### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ MÖBIUS'A

5. Общее понятие о конформном отображении. Известно из теории функций, что аналитическая функция w=f(z), регулярная в точке  $z=z_0$  и имеющая в этой точке производную, отличную от нуля, отображает некоторую окрестность точки  $z_0$  плоскости z взаимно однозначно и непрерывно на некоторую окрестность точки  $w_0=f(z_0)$  в плоскости w.

Разложение функций f(z) около  $z = z_0$  дается рядом

$$w - w_0 = A(z - z_0) + B(z - z_0)^2 + \dots,$$

$$A \neq 0.$$
(5,1)

Положим

$$z - z_0 = re^{it}, \quad A = ae^{i\lambda}, \quad w - w_0 = \rho e^{iu},$$
 (5,2)

где t, u,  $\lambda$  — действительные числа, а r, a,  $\rho$  — положительные; тогда из формулы (5,1) вытекает

$$\rho e^{iu} = are^{i(\lambda+t)} \left\{ 1 + \varphi(r,t) \right\}, \\ \lim_{r \to 0} \varphi(r,t) = 0.$$
 (5,3)

Написанное соотношение эквивалентно двум:

$$\rho = ar \{1 + \alpha(r, t)\}, \qquad u = \lambda + t + \beta(r, t), \\ \lim_{r \to 0} \alpha(r, t) = 0, \qquad \lim_{r \to 0} \beta(r, t) = 0.$$
 (5,4)

При r = 0 второе из этих соотношений дает:

$$u = \lambda + t. \tag{5,5}$$

Эта формула дает связь между направлением кривой, выходящей из точки  $z_0$ , и направлением в точке  $w_0$  соответствующей кривой на плоскости w.

Уравнение (5,5) показывает, что отображение, осуществляемое функцией w=f(z), изогонально в точке  $z_0$  (обладает консерватизмом углов). Производная f'(z) не может обратиться в нуль в некоторой окрестности точки  $z_0$ , и потому отображе-

ние окрестности точки  $z_0$  на участок плоскости w не только непрерывно, но и конформно.

Первое из соотношений (5,4) может быть истолковано следующим образом: "бесконечно малые" круги z-плоскости переходят в "бесконечно малые" круги w-плоскости. Существуют нетривиальные конформные преобразования, при которых это свойство сохраняется и для конечных кругов; мы изучим прежде всего такие преобразования.

6. Преобразование Möbius'а. Пусть A, B, C — три комплексные константы,  $\overline{A}$ ,  $\overline{B}$ ,  $\overline{C}$  — величины сопряженные, а x, x — комплексное переменное и сопряженная с ним величина.

Уравнение

$$(A + \overline{A})x\overline{x} + Bx + \overline{B}x + C + \overline{C} = 0, \tag{6,1}$$

коэфициенты которого удовлетворяют условию

$$B\overline{B} > (A + \overline{A})(C + \overline{C}),$$
 (6,2)

всегда изображает действительный круг или действительную прямую. Обратно, всякий действительный круг и всякая действительная прямая при надлежащем выборе коэфициентов могут быть изображены уравнением вида (6,1) с соблюдением условия (6,2).

Если в уравнении (6,1) произвести одно из преобразований

$$y = x + \lambda, \tag{6,3}$$

$$y=\mu x, \qquad (6,4)$$

$$y = \frac{1}{x}, \tag{6,5}$$

то мы опять получим уравнение вида (6,1) с другими константами A, B, C, но снова удовлетворяющими условию (6,2). Преобразование (6,5) переводит в прямые линии те круги и прямые (6,1), для которых  $C+\overline{C}=0$ , т. е. круги, проходящие через начало координат. Мы поэтому будем часто рассматривать прямые линии как круги, проходящие через точку  $x=\infty$ .

7. Если мы произведем последовательно, любое число раз, преобразования вида (6,3), (6,4), (6,5) с произвольными константами  $\lambda$  и  $\mu$ , результирующее преобразование будет вида:

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},\tag{7.1}$$

где α, β, γ, δ — постоянные, удовлетворяющие условию

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 0,$$
 (7,2)

так как, если это условие не выполнено, правая часть (7,1) представляет собой константу или выражение, не имеющее смысла и, следовательно, (7,1) не дает преобразования x-плоскости.

Обратно, всякое дробно-линейное преобразование вида (7,1) может быть легко получено при помощи преобразований вида (6,3), (6,4), (6,5). Отсюда следует, что (7,1) переводит круги в круги. Преобразование (7,1) впервые изучалось Möbius'ом (1790—1868), и поэтому его часто называют преобразованием Möbius'а.

8. Обращение преобразования (7,1)

$$x = \frac{-\delta y + \beta}{\gamma y - \alpha}, \quad (-\delta) \quad (-\alpha) - \beta \gamma \neq 0$$
 (8,1)

есть снова преобразование Möbius'a.

Если мы применим сначала преобразование (7,1), а потом другое преобразование Möbius<sup>7</sup>a

$$z = \frac{\alpha_1 y + \beta_1}{\gamma_1 y + \delta_1}, \ \alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1 \neq 0,$$

результирующее преобразование будет также преобразованием Möbius'a

$$z = \frac{Ax + B}{\Gamma x + \Delta}$$

с детерминантом, отличным от нуля

$$A\Delta - B\Gamma = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1) \pm 0.$$

Указанные свойства приводят к теореме:

Теорема 1: Совокупность всех преобразований Möbius'а образует группу [1].

9. Назовем замкнутой х-плоскостью х-плоскость, дополненную точкой  $x = \infty$ . Уравнения (7,1) и (8,1) показывают, что всякое преобразование Möbius'а есть взаимно однозначное преобразование замкнутой х-плоскости в самое себя.

Если  $\gamma \neq 0$ , то при преобразовании (7,1) точка  $y = \frac{\alpha}{\gamma}$  соответствует точке  $x = \infty$ , а точка  $y = \infty$  соответствует точке  $x = -\frac{\delta}{\gamma}$ .

Если  $\gamma = 0$ , точки  $x = \infty$  и  $y = \infty$  соответствуют друг другу. Из (7,1) следует:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2}.$$

Полученное выражение показывает (§ 5), что отображение (7,1) конформно всюду, за исключением точек  $x=\infty$  и  $x=\frac{\delta}{\gamma}$ . Эти две точки перестанут быть исключительными, если определение конформного отображения дополнить следующим: функция y=f(x) отображает конформно окрестность точки  $x_0$  на окрестность точки  $y=\infty$ , если  $\eta=\frac{1}{f(x)}$  отображает конформно окрестность точки  $\eta=0$ ; аналогично, y=f(x) отображает окрестность точки  $\eta=0$ ; аналогично,  $\eta=0$ ; аналогично,  $\eta=0$ ; анаформно на окрестность точки  $\eta=0$ ; если

$$y = \varphi(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

отображает конформно окрестность точки  $\xi = 0$  на окрестность точки  $y_0$ . В этом определении не исключается случай  $y_0 = \infty$ . Последние определения позволяют сформулировать теорему.

Теорема 2: Всякое преобразование Möbius'а дает взаимно однозначное и конформное отображение всей замкнутой х-плоскости на замкнутую у-плоскость.

10. Инвариантность ангармонического отношения. Пусть  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  четыре точки x-плоскости, переходящие при преобразовании (7,1) в точки  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ ,  $y_4$ . Предположим сначала, что все величины  $x_i$ ,  $y_i$  конечны; тогда для любой пары точек имеем:

$$y_k - y_i = \frac{\alpha x_k + \beta}{\gamma x_k + \delta} - \frac{\alpha x_i + \beta}{\gamma x_i + \delta} = \frac{\alpha \delta - \beta \gamma}{(\gamma x_k + \delta) (\gamma x_i + \delta)} (x_k - x_i).$$

Отсюда следует, что для четырех точек имеет место равенство:

$$\frac{(y_1 - y_4) (y_3 - y_2)}{(y_1 - y_2) (y_3 - y_4)} = \frac{(x_1 - x_4) (x_3 - x_2)}{(x_1 - x_2) (x_3 - x_4)}.$$
 (10,1)

Выражение

$$\frac{(x_1-x_4) (x_3-x_2)}{(x_1-x_2) (x_3-x_4)}$$

называется ангармоническим отношением четырех точек  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ . Равенство (10,1) показывает, что ангармоническое отношение остается инвариантным при всяком преобразовании Möbius'а. Подобные же вычисления показывают, что уравнение (10,1), надлежащим образом измененное, остается верным, если

одно из чисел  $x_i$ , или одно из чисел  $y_i$  бесконечно; если, например,  $x_2 = \infty$  и  $y_1 = \infty$ ,

$$\frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_4} = \frac{x_1 - x_4}{x_3 - x_4}. (10,2)$$

11. Пусть  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  и  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  две группы, содержащие по три неравных комплексных числа. Предположим сначала, что все шесть комплексных чисел конечны. Уравнение

$$\frac{(y_1-y)(y_3-y_2)}{(y_1-y_2)(y_3-y)} = \frac{(x_1-x)(x_3-x_2)}{(x_1-x_2)(x_3-x)},$$
 (11,1)

разрешенное относительно у, дает преобразование Möbius'a.

Это преобразование, как легко проверить, переводит каждую точку  $x_i$  в соответствующую точку  $y_i$  1. Из § 10 следует, что (11,1) есть единственное преобразование Möbius'а, обладающее таким свойством. Результат остается верным и в том случае, когда одна из точек  $x_i$ ,  $y_i$  становится бесконечной, только в этом случае уравнение (11,1) должно быть надлежащим образом изменено.

12. Так как круг однозначно определяется тремя точками, лежащими на его окружности, результат § 11 может быть приложен к нахождению преобразования Möbius'а, переводящего заданный круг в другой круг или в прямую линию. Например, если положим  $x_1=1,\ x_2=i,\ x_3=-1$  и  $y_1=0,\ y_2=1,\ y_3=\infty$ , получим преобразование

$$v = i \frac{1 - x}{1 + x}, \tag{12,1}$$

отображающее окружность круга |x|=1 на действительную ось и внутреннюю область единичного круга |x|<1 на верхнюю половину у-плоскости. При другом выборе шести точек  $x_i$ ,  $y_i$  можно отобразить внешнюю область единичного круга |x|>1 на ту же полуплоскость. При выборе трех точек  $x_i$  на том же круге, на котором расположены точки  $y_i$ , получим отображение внутренности круга на себя или на внешность того же круга, в зависимости от того, будут ли точки  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  и  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  определять одно и то же или различные направления обхода окружности.

<sup>1</sup> Определитель преобразования

 $<sup>\</sup>alpha\delta - \beta\gamma = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3).$ 

Так, например, если в (11,1) мы положим  $y_1=0$ ,  $y_2=1$ ,  $y_3=\infty$  и сначала  $x_1=1$ ,  $x_2=\infty$ ,  $x_3=0$ , а потом  $x_1=\infty$ ,  $x_2=1$ ,  $x_3=0$ , мы получим два преобразования:

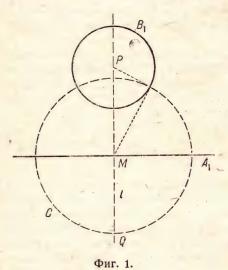
$$y = \frac{x-1}{x}$$
 if  $y = \frac{1}{x}$ , (12,2)

первое из которых преобразует верхнюю полуплоскость в самое себя, а второе ее же — в нижнюю полуплоскость.

13. Пучки окружностей. Так как преобразование Möbius'а конформно, оно преобразует ортогональные круги в ортогональные.

Теорема 3: Для двух произвольных кругов A и В можно подобрать преобразование Möbius'а, переводящее их в две прямые или в два концентрических круга.

Если A и B имеют общую точку P, всякое преобразование Möbius'a, переводящее точку P в точку  $\infty$ , преобразует A и B



в прямые линии; эти прямые будут пересекаться или будут параллельны, в зависимости от того, имеют ли А и В общую точку, отличную от Р, или нет.

Если A и B не имеют общей точки, совершим прежде всего преобразование Моьішѕ'а, отображающее круг A на прямую линию  $A_1$ ; пусть  $B_1$  — круг, соответствующий при этом преобразовании кругу B; A- и  $B_1$  не пересекаются. V з центра  $B_1$  проведем прямую I перпендикулярно к  $A_1$ ; пусть M — основание этого перпендикуляра. Из точки M, как из центра, опишем круг C, ортогональ-

ный к  $B_1$ . Отобразим вторым преобразованием Möbius'а круг C и прямую l на две пересекающиеся (ортогонально) прямые линии; тогда  $A_1$ ,  $B_1$  перейдут в два круга  $A_2$ ,  $B_2$ , пересекающие эти прямые ортогонально. Отсюда следует, что круги  $A_2$ ,  $B_2$  концентричны.

14. Если даны две произвольные пересекающиеся прямые линии, то существует семейство концентрических окружностей,

ортогональных к ним; аналогично существует семейство параллельных линий, ортогональных к двум заданным параллельным, и существует семейство прямых, пересекающихся в одной точке, ортогональных к двух заданным концентрическим окружностям. Каждое из перечисленных семейств содержит все прямые и круги, пересекающие две заданные линии ортогонально.

Так как преобразование Möbius а конформно, это позволяет

высказать теорему.

Теорема 4: Для каждой пары кругов AB существует одно и только одно однопараметрическое семейство окружностей, пересекающих A и B ортогонально; это семейство называется пучком окружностей, сопряженным с парой AB.

Если окружности A и B пересекаются в двух точках P, Q, то два круга, принадлежащие к сопряженному пучку, не имеют общих точек; в этом случае пучок называется эллиптическим. Точки P и Q, называемые предельными точками этого пучка,

не принадлежат ни одной окружности пучка.

Если А и В касаются в точке P, сопряженный пучок состоит из окружностей, касающихся друг друга в точке P, и называется параболическим пучком; P называется узловой точкой пучка. Наконец, если A и В не имеют общей точки, сопряженный пучок состоит из всех окружностей, проходящих через две фиксированные точки, узловые точки пучка, и называется гиперболическим пучком.

15. Рассматривая все три типа пучков, определенных в § 14, мы видим, что если C, D две произвольные окружности пучка, сопряженного с A и B, то A и B принадлежат к пучку, сопряженному с C и D. Этот пучок не зависит от выбора окружностей C и D, что приводит нас к следующей теореме. Теорема 5: Существует один и только один пучок окруж-

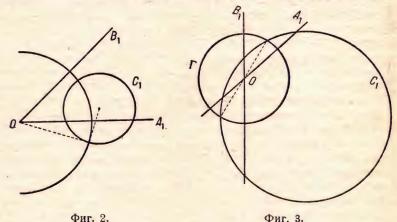
Теорема 5: Существует один и только один пучок окружностей, содержащий две произвольно заданные окружности, или всякий пучок окружностей однозначно определяется двумя

любыми своими элементами.

Для каждого из трех перечисленных видов пучков очевидно, что: через всякую точку плоскости, отличную от предельных точек, или узловых точек, проходит одна и только одна окружность, принадлежащая к данному пучку.

16. Связки окружностей. Пусть A, B C, — три окружности, не имеющие общей точки. Если A и B не имеют общей точки, то их можно перевести (как следует из  $\S$  13) преобразованием Möbius'а, в две концентрические окружности  $A_1$ ,  $B_1$ , и тогда один из общих для  $A_1$  и  $B_1$  диаметров, который пересекает

ортогонально окружность  $C_1$  (изображение окружности C), будет окружностью, пересекающей ортогонально  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Таким образом в этом случае существует окружность, ортогональная ко всем трем окружностям A, B, C. Если A и B касаются, то существует преобразование Möbius'а, переводящее их в две параллельные прямые, и C в некоторую окружность  $C_1$ . Так как один из диаметров  $C_1$  будет перпендикулярен к двум полученным прямым, в этом случае опять существует окружность, пересекающая все три окружности A, B, C ортогонально.



Наконец, если A и B имеют две общие точки, существует преобразование Möblus'а, отображающее их на две прямые, пересекающиеся в некоторой точке O, а окружность C на окружность  $C_1$ , не проходящую через точку O. Надо различать два случая: если O лежит вне круга  $C_1$ , существует круг, пересекающий  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  ортогонально; если же O находится внутри  $C_1$ , существует круг  $\Gamma$ , пересекающий окружности  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  в своих диаметрально противоположных точках. Мы доказали следии и противоположных сочках. следующую теорему.

Теорема 6: Для трех компланарных 1 окружностей осуществляется по крайней мере одно из следующих условий: существует окружность К, ортогональная к трем данным; все три окружности проходят через одну общую точку; три окружности могут быть отображены преобразованием

<sup>1</sup> Лежащих в одной плоскости.

Möbius'а на три окружности, пересекающие одну и ту же окружность Г, в ее диаметрально противоположных точках.

Непосредственно из доказательства следует, что ортогональный круг K единственен, если только окружности A, B и C не принадлежат к одному и тому же пучку. Дальше мы докажем, что для трех заданных кругов не может осуществляться более чем одно из трех перечисленных условий.

17. Мы опять определим три типа семейств окружностей, называемых связками окружностей.

Эллиптическая связка состоит из всех окружностей плоскости, пересекающих фиксированный круг Г в его диаметрально противоположных точках. Круг Г сам принадлежит к связке и называется экватором.

Параболическая связка состоит из всех окружностей, проходящих через фиксированную точку плоскости, узловую точку связки.

Гиперболическая связка состоит из всех окружностей, ортогональных к фиксированной окружности или прямой линии.

Эти три конфигурации существенно различны: каждая пара окружностей, принадлежащих к эллиптической связке, имеет две общих точки; каждые две окружности параболической связки либо имеют две различные общие точки, либо касаются в одной точке; наконец, в гиперболической связке существуют окружности, не имеющие общей точки.

18. Несмотря на это, связки окружностей обладают замечательными общими свойствами. Например:

Теорема 7: Если А и В две окружности связки, все окружности пучка, содержащего А и В, принадлежат к связке. Для параболической связки справедливость этой теоремы очевидна; для гиперболической она следует из того, что ортогональная окружность связки пересекает А и В и, следовательно, пересекает ортогонально всякую окружность пучка. Для эллиптической связки это есть следствие одной элементарной теоремы Евклида.

Так же просто доказательство следующей теоремы:

Теорема 8: Пусть в плоскости связки окружностей расположена точка P, которая в случае параболической связки не совпадает с ее узловой точкой; тогда через точку P проходит бесконечное множество окружностей связки, и эти окружности образуют пучок.

19. Пусть A, B, C три окружности связки, не принадлежащие одному и тому же пучку, а D какая-нибудь четвертая окружность той же связки; исходя из A, B, C, путем последо-

вательного построения пучков, можно притти к пучку окружностей, содержащему D, все элементы которого принадлежат к связке. Для того чтобы это показать, возьмем на окружности D точку P, отличную от предельных точек и общих точек пучков, определяемых окружностями A, B и A, C, и не лежащую на окружности A; проведем через точку P две окружности E, F; E принадлежит к пучку, определяемому A и B, а F к пучку, определяемому A и B, C не принадлежат к одному пучку; из второй теоремы § 18 следует, что D принадлежит к пучку, определяемому E и F.

Из сказанного следует, что связка окружностей однозначно определяется тремя ее элементами, не принадлежащими к одному и тому же пучку; в частности, не существует окружности, ортогональной к трем окружностям, принадлежащим к эллиптической связке и не принадлежащим к одному пучку; в самом деле, тогда связка, определяемая этими тремя окружностями, была бы гиперболической.

20. Окружности, полученные преобразованием Möbius'а из всех окружностей связки, снова образуют связку, причем обе связки принадлежат к тому же типу.

Для параболической и гиперболической связки теорема есть непосредственное следствие их определения. Обозначим через M совокупность всех окружностей, полученных преобразованием Möbius'а из окружностей эллиптической связки; окружности M, проходящие через точку  $\infty$ , образуют пучок прямых, пересекающихся в некоторой точке O. Пусть A, B — две прямые, проходящие через точку O, а C — окружность, принадлежащая к M. В соответствии с § 19 не существует окружности, ортогональной к A, B, C, и потому точка O должна находиться внутри круга C; по § 16 окружности A, B, C принадлежат эллиптической связке, каждый элемент которой получается из A, B, C путем последовательного построения пучков. Эта связка должна быть тождественна с M; в самом деле, элементы M получаются точно таким же построением.

21. Последний результат вместе с результатами § 16 показывает, что три компланарные окружности, не принадлежащие

к одному пучку, однозначно определяют связку.

22. Связка окружностей не может содержать эллиптический и одновременно сопряженный ему гиперболический пучок. В самом деле, из § 17 следует, что ни эллиптическая, ни параболическая связка не может содержать эллиптический пучок; по-

этому такая связка может быть только гиперболической. Но тогда существует экружность (ортогональная окружность связки), пересекающая все элементы двух сопряженных пучков ортогонально, а это невозможно.

23. Инверсия относительно круга. Пусть даны прямая линия a и точка P, и пусть  $P^*$  точка, симметричная с P относительно a; мы будем называть  $P^*$  инверсией точки P относительно a. В общем случае, если дан круг A, существует преобразование Möbius'а, переводящее его в прямую линию; отсюда следует, что всякой точке P соответствует точка  $P^*$ , называемая инверсией P относительно A и характеризуемая тем, что всякий круг, ортогональный к A и проходящий через P, проходит также через  $P^*$ .

Операция инверсии взаимна <sup>1</sup>; фигура, образованная кругом, точкой и ее инверсией, при всяком преобразовании Möbius'а переходит в круг и две точки, каждая из которых есть инверсия другой относительно этого круга. Очевидно, что инверсия относительно прямой дает изогональное, но не конформное отображение плоскости на самое себя; сопоставляя это с предыдущим, видим, что тем же свойством обладает инверсия относительно всякого круга.

24. Инверсия относительно действительной оси произвольной точки t t-плоскости совпадает с сопряженной точкой  $\overline{t}$ ; вообще точки

$$x = e^{i\theta}t, \quad y = e^{i\theta}\overline{t} \tag{24,1}$$

симметричны относительно прямой линии, проходящей через начало координат и составляющей с действительной осью угол  $\theta$ .

Первое из уравнений (24,1) дает  $\bar{x} = e^{-i\theta}t$ , и, следовательно,

$$y = e^{2i\theta} \overline{x}. \tag{24,2}$$

Аналогично, так как преобразование

$$x = a \frac{1+it}{1-it} \tag{24,3}$$

преобразует действительную ось t-плоскости в круг |x|=a x-плоскости, точки

$$x = a \frac{1+it}{1-it}, \ y = a \frac{1+it}{1-it}$$
 (24,4)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> (Involutory), т. е. если  $P^*$  — инверсия P, то P — инверсия  $P^*$ .

симметричны относительно круга |x| = a; отсюда непосредственно следует:

 $y = \frac{a^2}{\bar{x}}.\tag{24,5}$ 

25. Две последовательные инверсии эквивалентны преобразованию Möbius'а или тождественному преобразованию. Так, например, при последовательных инверсиях относительно двух прямых, проходящих через начало координат и составляющих с действительной осью углы  $\theta$  и  $\theta + \varphi$ , из (24,2) имеем:

$$y = e^{2i\theta - x}, \quad z = e^{2i(\theta + \varphi)} \overline{y},$$

и, следовательно,

$$z = e^{2i\varphi}x. (25,1)$$

Результирующее преобразование гает поворот плоскости относительно начала координат на угол 2 $\varphi$ ; угол поворота зависит только от угла, составляемого двумя данными прямыми, но не зависит от положения этих прямых.

Аналогично при инверсиях относительно двух концентрических кругов |x| = a и |x| = b уравнение (24,5) дает:

$$y = \frac{a^2}{x}, \quad z = \frac{b^2}{y},$$

откуда

 $z = \frac{b^2}{a^2} x. {(25,2)}$ 

Результирующее преобразование сводится к растяжению (преобразованию подобия), которое зависит только от отношения радиусов b:a, но не зависит от самих радиусов. Подобным же образом можно убедиться, что две последовательные инверсии относительно параллельных прямых линий эквивалентны параллельному переносу, зависящему только от направления этих линий и расстояния между ними, но не от их положения на плоскости.

Так как любые два круга могут быть отображены преобразованием Möbius'а на одну из трех разобранных конфигураций, мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 9: Две последовательных инверсии плоскости относительно двух произвольных кругов A, B эквивалентны некоторому преобразованию Möbius'a; это же преобразование может быть получено последовательным применением инверсии относительно двух других, подходящим образом подобран-

ных кругов  $A_1$ ,  $B_1$ , принадлежащих к пучку, определяемому окружностями A, B, причем один из этих кругов может быть выбран произвольно.

Далее: результирующее преобразование Möbius'а оставляет инвариантными круги, принадлежащие к пучку, сопряженному с A, B.

26. Геометрия преобразований Möbius'а. На комплексной плоскости существуют точки, остающиеся неизменными при преобразовании Möbius'а,

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$
 (26,1)

Для этих точек y = x, и, следовательно, они совпадают с корнями уравнения

$$\gamma x^2 + (\delta - \alpha) x - \beta = 0.$$
 (26,2)

Если все коэфициенты этого уравнения обращаются в нуль, преобразование будет тождественным y = x, и всякая точка плоскости остается неизменной.

Если  $\gamma \neq 0$ , то пусть  $x_1$ ,  $x_2$  корни уравнения (26,2)

$$x_{i} = \frac{\alpha - \delta \pm \sqrt{D}}{2\gamma},$$

$$D = (\alpha + \delta)^{2} - 4 (\alpha \delta - \beta \gamma);$$
(26,3)

преобразование оставляет неподвижной одну точку при D=0 и две при  $D \neq 0$ .

Если  $\gamma = 0$ , точка  $x = \infty$  должна быть рассматриваема как неподвижная точка, и в этом случае опять преобразование оставляет неподвижной одну точку, если D = 0, и две, если  $D \neq 0$ .

27. Предположим сначала, что D=0. Если также  $\gamma=0$ , то  $\alpha=\delta$  и преобразование (26,1) имеет вид:

$$y = x + \frac{\beta}{\alpha}.\tag{27,1}$$

Это есть преобразование параллельного переноса и может быть получено двумя инверсиями относительно параллельных прямых. Если  $\gamma \neq 0$ , то (26,3) дает:

$$x_1 = x_2 = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma} \,. \tag{27,2}$$

Разрешая относительно у уравнение

$$\frac{1}{y - x_1} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{2\gamma}{\alpha + \delta}, \qquad (27,3)$$

мы получим преобразование (26,1) 1. Если теперь ввести новые координаты

$$\omega = \frac{1}{y - x_1}, \quad t = \frac{1}{x - x_1},$$

преобразование сведется к параллельному переносу, именно

$$\omega = t + \frac{2\gamma}{\alpha + \delta}.$$

Это приводит к такой теореме:

Теорема 10: Всякое преобразование Möbius'a (26,1), с обращающимся в нуль дискриминантом D, может быть получено двумя последовательными инверсиями относительно касающихся кругов.

28. Предположим теперь, что  $D \neq 0$ . Если  $\gamma = 0$ , то, сделав подстановку

$$\omega = y - \frac{\beta}{\delta - \alpha}, \quad t = x - \frac{\beta}{\delta - \alpha},$$

мы получим, исключая х и у:

$$\omega = \frac{\alpha}{\delta} t. \tag{28,1}$$

С другой стороны, при  $\gamma \pm 0$  положим:

$$\omega = \frac{y - x_2}{y - x_1}, \quad t = \frac{x - x_2}{x - x_1}. \tag{28,2}$$

В новых координатах неподвижными точками преобразования должны быть точки t=0 и  $t=\infty$ , поэтому оно имеет вид:

$$\omega = \rho t. \tag{28,3}$$

Точке  $x = \infty$  соответствуют  $y = \frac{\alpha}{x}$  и t = 1; поэтому из (28,3) вытемает при t=1

$$\rho = \omega = \frac{\alpha - \gamma x_2}{\alpha - \gamma x_1}.$$

Это уравнение может быть переписано в виде:

$$\rho = \frac{\alpha + \delta + \sqrt{\overline{D}}}{\alpha + \delta - \sqrt{\overline{D}}}.$$
 (28,4)

<sup>1</sup> В этом можно убедиться, например, заметив, что это преобразование переводит точки  $x'=x_1$ ,  $x''=\infty$ ,  $x'''=-\frac{\delta}{\gamma}$  в точки y'= $=x_1, y''=\frac{\alpha}{\gamma}, y'''=\infty.$ 

Так как при  $\gamma = 0$  уравнения (28,3) и (28,4) сводятся к (28,1), этот случай не нуждается в особом рассмотрении.

29. Если  $\rho$  действительно и положительно, преобразование  $\omega = \rho t$  сводится к растяжению и может быть получено двумя инверсиями относительно концентрических кругов. Если  $|\rho| = 1$ , т. е.  $\rho = e^{i\theta}$ , преобразование сводится к вращению плоскости и может быть получено двумя инверсиями относительно пересекающихся прямых. Если ни одно из этих условий не выполняется, то  $\rho = ae^{i\theta}$ , где  $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ , a > 0 и  $a \neq 1$ .

Такое преобразование может быть получено поворотом плоскости и затем растяжением ее, т. е. путем четырех инверсий относительно кругов. Легко убедиться, что это преобразование не оставляет инвариантным ни одного круга и, следовательно, не может быть получено двумя последовательными инверсиями. В этом случае преобразование называется локсодромическим.

30. Разобранные типы линейных преобразований легко различить, если ввести параметр

$$\lambda = \frac{(\alpha + \delta)^9}{4 (\alpha \delta - \beta \gamma)}. \tag{30,1}$$

Тогда уравнение (28,4) приводится к виду:

$$\rho = \frac{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda - 1}}{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda - 1}};$$

разрешив его относительно х, получим:

$$\lambda = \frac{(\rho+1)^2}{4\rho} = 1 + \frac{(\rho-1)^2}{4\rho}.$$

Если  $\rho$  положительно и отлично от единицы,  $\lambda$  действительно и больше единицы; во втором случае, если  $\rho = e^{i\theta} \ [\theta \equiv \equiv 0 \pmod{2\pi}]$ ,  $\lambda = \cos^2\frac{1}{2}\theta$ , т. е.  $\lambda$  положительно и меньше единицы; наконец,  $\lambda = 1$ , если D = 0. Таким образом: если  $\lambda$  комплексно или действительно и отрицательно, преобразование будет локсодромическим. Если же  $\lambda$  действительно и положительно, преобразование эквивалентно последовательным инверсиям относительно двух кругов эллиптического, параболического или гиперболического пучка в зависимости от того, будет ли  $\lambda > 1$ ,  $\lambda = 1$  или  $\lambda < 1$ .

#### Глава II

#### НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ

31. Инверсии относительно окружностей связки. Мы будем теперь рассматривать совокупности преобразований Möbius'а, эквивалентных двум инверсиям относительно кругов, принадлежащих к заданной связке. Мы докажем, прежде всего, что такие преобразования образуют группу.

Заметим, в первую очередь, что преобразование, обратное по отношению к одному из рассматриваемых, получается просто изменением порядка инверсий; четыре инверсии относительно кругов A, B, B, A, произведенные в написанном здесь порядке,

очевидно, дают тождественное преобразование.

32. Для того чтобы доказать, что рассматриваемые преобразования образуют группу, надо показать, что четыре последовательные инверсии относительно окружностей A, B, C, D, принадлежащих к связке, могут быть заменены двумя последовательными инверсиями относительно скружностей той же связки.

Предположим, во-первых, что окружности A, B пересекаются в двух различных точках P и Q и, следовательно, определяют гиперболический пучок. Из § 22 следует, что Ри Q не могут быть одновременно предельными точками пучка, определяемого окружностями C и D, и, следовательно, в этом пучке найдется по крайней мере одна окружность  $C_1$ , проходящая через одну из точек P, Q; предположим, что  $C_1$  проходит через P. Согласно § 18 окружности  $A, B, C_1$  принадлежат к одному пучку, и, следовательно (§ 25), инверсии относительно А и В могут быть заменены инверсиями относительно  $A_1$ ,  $C_1$ , где  $A_1$  — окружность того же пучка. Аналогично инверсии относительно С и D могут быть заменены инверсиями относительно  $C_1$  и  $D_1$ , где  $D_1$  — окружность, принадлежащая к пучку, определяемому С и Д. Таким образом четыре инверсии относительно А, В, С, D эквивалентны четырем инверсиям относительно  $A_1$ ,  $C_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ , т. е. двум инверсиям относительно  $A_1$  и  $D_1$ , так как две инверсии относительно С, уничтожают друг друга.

В общем случае пучок, определяемый окружностями B, C, содержит по крайней мере одну окружность  $B_1$ , совпадающую с A или пересекающую A в двух различных точках. Инверсии относительно B и C могут быть заменены инверсиями относительно

 $B_1$ ,  $C_1$ , и, следовательно, инверсии относительно A, B, C, D — инверсиями относительно A,  $B_1$ ,  $C_1$ , D; янверсии относительно A и  $B_1$  либо уничтожают друг друга, либо задача сводится к уже рассмотренному случаю.

Группы преобразований, существование которых было только что доказано, существенно различны в случаях эллиптической,

параболической и гиперболической связок.

- 33. Окружности эллиптической связки могут быть получены стереографической проекцией больших кругов некоторой сферы [2]. Инверсии плоскости относительно каждой окружности связки соответствует обычное отражение сферы относительно плоскости соответствующего большого круга, и, следовательно, получающаяся группа преобразований Möbius изоморфна группе вращений сферы [3].
- 34. Окружности параболической связки подходящим преобразованием Möbius'а могут быть переведены в совокупность прямых линий на плоскости. Так как каждое обычное движение на плоскости может быть получено как результат инверсий относительно двух прямых, группа преобразований Möbius'а изоморфна группе движений на плоскости.
- 35. Отображение круга на самого себя. Для нас наиболее важен случай гиперболической связки, когда каждое преобразование группы эквивалентно двум инверсиям относительно окружностей, ортогональных к заданному кругу (или заданной прямой).

Непосредственно видно, что при каждой инверсии и, следовательно, при каждом преобразовании группы как окружность, так и внутренность единичного круга переходят в себя <sup>1</sup>.

Мы хотим доказать обратное.

Теорема 1: Каждое преобразование Möbius'а, обладающее этим свойством, содержится в группе.

Будем доказывать теорему шаг за шагом; мы предположим, что преобразующийся в самого себя круг есть единичный круг  $|z| \leq 1$ . Докажем прежде всего, что каждую внутреннюю точку Q этого круга с координатой  $z=a\left(|a|<1\right)$  можно преобразованием группы перевести в начало координат  $P\left(z=0\right)$ . Инверсия  $Q_1$  точки Q относительно единичного круга O имеет

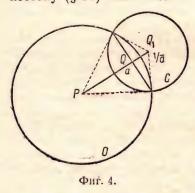
Инверсия  $Q_1$  точки Q относительно единичного круга O имеет координату  $\frac{1}{a}$ , и круг C с центром в точке  $\frac{1}{a}$  и радиусом

<sup>1</sup> Если ортогональный круг есть прямая линия, операции группы переводят каждую из полуплоскостей, определенных этой прямой, в самое себя.

 $\sqrt{\frac{1}{2}}$  — 1 ортогонален к кругу О. Совершим инверсию относи-

тельно круга C, а потом относительно прямой PQ, которые принадлежат к рассматриваемой гиперболической связке. Первое преобразование переводит точку Q в P, а второе оставляет P неподвижной, следовательно, результирующее преобразование переводит Q в P. Следующее замечание будет нам полезно в дальнейшем: преобразование Möbius'а, эквивалентное двум совершенным ин-

версиям, переводит точки a,  $\frac{a}{V\overline{aa}}$ ,  $\frac{1}{a}$  в точки 0,  $-\frac{a}{V\overline{aa}}$ ,  $\infty$  и поэтому (§ 11) имеет вид:



$$y = \frac{a - x}{1 - \overline{a}x} \,. \tag{35,1}$$

Так как все вращения около начала координат принадлежат к рассматриваемой группе, полученный результат может быть высказан в следующей ясной форме: существует преобразование группы, отображающее область  $|z| \leq 1$ на самое себя и переводящее произвольный, направленный линейный элемент, проходящий через

внутреннюю точку области, в заданный линейный элемент, проходящий через начало координат. В частности, преобразование

$$y = \frac{x - a}{1 - \overline{a}x},\tag{35,2}$$

полученное из (35,1) поворотом на 180°, принадлежит к группе. Теорема будет полностью доказана, если будет установлено, что всякое преобразование Möbius'а, отображающее круг на самого себя и оставляющее на месте заданный линейный элемент, проходящий через начало координат (и, следовательно, всякий линейный элемент, проходящий через начало координат), есть тождественное преобразование. Такое преобразование оставляет неподвижными точки x=0 и  $x=\infty$  и переводит точку x=1в точку  $x=e^{i\theta}$ . Поэтому оно должно иметь вид:  $y=e^{i\theta}x$ ; так как оно оставляет неподвижными элементы, проходящие через начало координат, то  $\theta = 0$ .

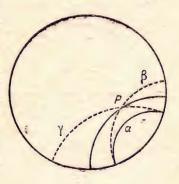
36. Неевклидова геометрия. Группа преобразований Möbius'а, отображающих круг (или полуплоскость) на самого себя, имеет много общих свойств с группой движений на плоскости. При этой аналогии дуги окружностей гиперболического пучка, расположенные внутри единичного круга или полуплоскости, играют роль прямых линий на плоскости.

Так, например, мы имеем очевидную теорему, соответствующую тому факту, что прямая линия на евклидовой плоскости одновначно определяется двумя своими точками: через каждые две точки, лежащие в верхней полуплоскости (или внутри единичного круга  $|x| \leqslant 1$ ), проходит одна и только одна окружность, ортогональная к действительной оси (или к единичному кругу), или, как уже упоминалось выше, через каждый линейный элемент верхней полуплоскости (или круга  $|x| \leqslant 1$ ) можно провести одну и только одну окружность гиперболической связки; совершенно аналогичное положение имеет место для прямых линий на евклидовой плоскости.

Вследствие этой аналогии дуги ортогональных кругов называются неевклидовыми прямыми, полуплоскость (или круг) — неевклидовой плоскостью и преобразования Möbius¹a, преобразующие неевклидову плоскость в самое себя, неевклидовыми движениями.

37. Несмотря на это сходство, можно немедленно усмотреть фундаментальное отличие неевклидовой геометрии от обычной.

В евклидовой геометрии, по 11-му постулату Евклида, через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую линию, не пересекающую данную прямую; между тем на неевклидовой плоскости через точку, не лежащую на данной неевклидовой прямой а, можно провести бесконечное множество не пересекающих ее неевклидовых прямых. Через точку Р проходят две неевклидовы прямые ри у, разбивающие все прямые, проходящие через Р, на два класса: прямые, пересекающие а и не пере-

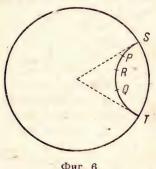


Фиг. 5.

секающие. Две неевклидовы прямые α и β, представляющие собой дуги окружностей, касающиеся в точке ортогонального круга, называются параллельными (Лобачевский, 1793—1856).

38. Угол и расстояние. Неевклидово движение, осуществляемое преобразованием Möbius'а, перемещая прямые линии, оставляет неизменными углы между пересекающимися прямыми, и, следовательно, обычный угол может быть принят за неевклидов угол.

С гругой стороны, обычное расстояние между двумя точками не инвариантно относительно неевклидовых движений, и, для того



Фиг. 6.

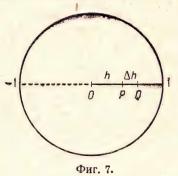
чтобы ввести идею расстояния в неевклидову геометрию, надо определить инвариантную функцию двух точек. Пусть P и Q — две точки неевклидовой плоскости, а S и Т — концы неевклидовой прямой, соединяющей P и Q.

Ангармоническое отношение à четырех точек (S, P, Q, T) однозначно определяется точками Р и Q и инвариантно относительно всякого неевклидова движения, и, следовательно, всякая функция  $\psi$  ( $\lambda$ ) также инвариантна. Мы будем искать функцию

 $\psi$  ( $\lambda$ ), которую обозначим D (P, Q), такую, что для всякой точки R отрезка PQ неевклидовой прямой, соединяющей точки P и Q,

$$D(P,R) + D(R,Q) = D(P,Q).$$
 (38,1)

39. Пусть h и  $\Delta h$  два положительных числа, сумма которых меньше единицы; обозначим через О центр ортогонального круга



Из равенства (38,1)
$$D(O,Q) = = D(O,P) + D(P,Q). (39,1)$$

|x|=1, и через P и Q точки с координатами h и  $h + \Delta h$ .

Ангармоническое отношение четырех точек — 1, 0, h, 1 есть функция h, и, следовательно, можем положить:

$$D(O, P) = \varphi(h),$$
  

$$D(O, Q) = \varphi(h + \Delta h). \quad (39,2)$$

Для вычисления D(P,Q)воспользуемся неевклидовым движением (§ 35)

$$y = \frac{x - h}{1 - hx},$$

оно переводит точку P в O, а Q в точку

$$\frac{\Delta h}{1 - h(h + \Delta h)}$$

и, так как расстояние должно быть инвариантным,

$$D(P, Q) = \varphi\left(\frac{\Delta h}{1 - h(h + \Delta h)}\right).$$

Отсюда и из (39,1) следует, что должно тождественно удовлетворяться функциональное уравнение

$$\varphi(h + \Delta h) = \varphi(h) + \varphi\left(\frac{\Delta h}{1 - h(h + \Delta h)}\right). \tag{39,3}$$

Если мы предположим, что  $\varphi(u)$  непрерывна и диференцируема при u=0 и что  $\varphi(0)=0, \varphi(0)=1,$  из (39,3) вытекает

$$\lim_{\Delta h \to 0} \frac{\varphi(h + \Delta h) - \varphi(h)}{\Delta h} = \frac{1}{1 - h^2}.$$

Отсюда следует, что  $\varphi(h)$  диференцируема при всех h, причем

$$\varphi'(h)=\frac{1}{1-h^2},$$

и интегрированием получаем:

$$\varphi(h) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+h}{1-h}.$$
 (39,4)

Непосредственная подстановка в (39,3) показывает, что это уравнение удовлетворяется.

40. Если  $z_1$  и  $z_2$  две произвольные точки неевклидовой плоскости, неевклидово движение

$$y = \frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1} z}$$

преобразует  $z_1$  в точку O и  $z_2$  в точку  $\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z_1}z_2}$ . Поворотом около

O эту точку можно перевести в  $\frac{|z_2-z_1|}{|1-\overline{z_1}z_3|}$ , и поэтому (39,4) дает:

$$D(z_1 z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|1 - \overline{z_1} z_2| + |z_2 - z_1|}{|1 - \overline{z_1} z_2| - |z_2 - z_1|}, |z_1| < 1, |z_2| < 1.$$
 (40,1)

41. Если ортогональный круг совпадает с действительной осью, неевклидово расстояние между двумя точками верхней

полуплоскости  $z_1$ ,  $z_2$  может быть получено следующим образом: преобразование Möbius'a

$$w = \frac{z - z_1}{z_1 - z} \tag{41,1}$$

переводит действительную ось z-плоскости в круг |w| = 1, точку  $z_1$  в точку  $w_1 = 0$  и точку  $z_2$  в точку

$$w_2 = \frac{z_2 - z_1}{\overline{z_1} - z_2}.$$

Пользуясь этим, получаем:

$$D(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|z_1 - z_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - z_2| - |z_1 - z_2|}.$$
 (41,2)

42. Теоремы о треугольнике. Из (40,1) легко вывести прямыми вычислениями для любых трех точек неевклидовой плоскости неравенство

$$D(z_1, z_3) \le D(z_1, z_2) + D(z_2, z_3),$$
 (42,1)

причем знак равенства надо брать тогда и только тогда, когда точка  $z_2$  лежит на неевклидовом отрезке, соединяющем  $z_1$  и  $z_3$ .

Однако следующий вывод формулы (42,1) более поучителен. Все аксиомы и постулаты Евклида, приведенные в начале его сочинения, за исключением постулата о параллельных, остаются в силе и на неевклидовой плоскости.

Так как постулат о параллельных не употребляется при доказательстве первых теорем сочинения Евклида, мы можем применять все шестнадцать теорем первой книги к нашим фигурам без изменения; в частности, теоремы о равенствах треугольников, теорему о том, что против большей стороны треугольника лежит больший угол, и, наконец, теорему о треугольнике, выраженную неравенством (42,1).

43. Неевклидова длина кривой. Понятие длины в смысле неевклидовой геометрии может быть тотчас же перенесено на кривые. Мы предположим, что кривая задана в параметрической форме.

Возьмем на ней конечное число точек, расположенных в порядке возрастания (или убывания) параметра. Примем эти точки в установленном порядке за вершины полигона, стороны которого суть неевклидовы прямые, и определим длину полигона как сумму длин его сторон; определим теперь длину дуги рассматриваемой кривой как верхний предел (если он конечен) длин всех вписанных полигонов.

Заменим в (40,1)  $z_1$  и  $z_3$  через z и  $z+\Delta z$ , тогда при  $\Delta z$ , стремящемся к нулю,

$$D(z, z + \Delta z) \sim \frac{|\Delta z|}{1 - |z^2|},$$

и, следовательно, неевклидова длина дуги кривой, заданной комплексной функцией  $z\left(t\right)$ , выражается интегралом

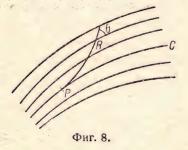
$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{|z'(t)|}{1-|z^2(t)|} dt.$$

Соответствующая формула для случая, когда ортогональный круг совпадает с действительной осью, получается подобным же образом из (41,2); эта формула имеет вид:

$$\frac{1}{i} \int_{t_1}^{t_2} \frac{|z'|}{\overline{z} - z} dt.$$

44. Геодезическая кривизна. Р. Finsler'ом (10) было показано, что при наиболее общей метрике геодезическая кри-

визна линии С в точке Р может быть получена следующим образом: рассмотрим семейство кривых, содержащее С, и построим геодезическую линию нашей метрики, касающуюся кривой С в точке Р; пусть Р точка, лежащая на этой касательной геодезической, s—геодезическое расстояние РР и в—угол при точке Р, под которым геодезическая РР пересекается с кри-



вой семейства, проходящей через точку  $R^{-1}$ ; тогда геодезическая кривизна в точке P дается формулой

$$k = \lim_{s \to 0} \frac{\theta}{s} \,. \tag{44,1}$$

Можно показать, что полученное таким образом число k не вависит от выбора семейства кривых.

Прилагая это определение кривизны к неевклидовой геометрии, мы видим, что кривизна инвариантна по отношению к неевклидовым движениям.

<sup>1</sup> Предполагается, что в метрике определена мера углов.

Далее, если ортогональный круг есть круг |z|=1, кривизна кривой в центре круга совпадает с обычной евклидовой кривизной, так как неевклидовы прямые, проходящие через центр, совпадают с обычными прямыми, и величины углов в обоих геометриях совпадают. В силу сказанного неевклидова кривизна кривой z (t) в точке  $z_0$  может быть вычислена как обычная кривизна кривой

$$\zeta(t) = \frac{z(t) - z_0}{1 - z(t) z_0} \tag{44.2}$$

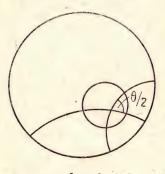
в точке  $\zeta = 0$ . Но эта кривизна дается формулой

$$k = \frac{\overline{\zeta'\zeta'' - \zeta'\overline{\zeta''}}}{2i\left(\zeta'\overline{\zeta'}\right)^{3/2}},\tag{44,3}$$

и, следовательно, из (44,2) получаем, заменяя  $z_0$  на z, окончательное выражение:

$$k = \frac{2\overline{z'}z'(\overline{z}\,z' - \overline{z}\,z') + (1 - \overline{z}\overline{z})(\overline{z'}z'' - \overline{z'}\overline{z'}')}{2i(z'\overline{z}')^{3/3}}.$$
 (44,4)

45. Неевклидовы движения. В § 32 было показано, что всякое неевклидово движение может быть получено двумя последовательными инверсиями относительно неевклидовых прямых.



Фиг. 9.

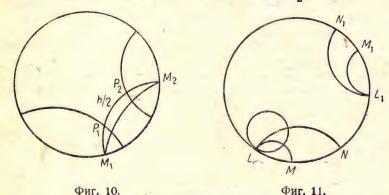
Существуют три существенно различных типа неевклидовых движений, соответствующих различным относительным расположениям двух прямых.

Предположим, во-первых, что инверсии производятся относительно двух прямых, пересекающихся в некоторой точке P и составляющих между собою угол  $\frac{1}{2}$   $\theta$ . В этом случае движение представляет собой неевклидово вращение вокруг точки P на угол  $\theta$ . Фиксируя точку P и меняя  $\theta$ , мы получим однопара-

метрическую группу неевклидовых вращений. Пусть  $P^*$  инверсия точки P относительно ортогонального круга; каждая окружность эллиптического пучка с предельными точками P,  $P^*$  переходит в самое себя при всяком преобразовании группы вращений, и, следовательно, окружности пучка, лежащие на неевклидовой плоскости, представляют собой неевклидовы окружности с об-

щим неевклидовым центром в точке P. Все точки каждой из этих окружностей C находятся на одинаковом неевклидовом расстоянии от точки P; это расстояние есть неевклидов радиус C.

46. Предположим, во-вторых, что две инверсии, к которым сводится движение, производятся относительно прямых, не пересекающихся и не параллельных в смысле Лобачевского. Сопряженный пучок, состоящий из окружностей, переходящих в себя при этом движении,—гиперболический; его фокусы  $M_1$  и  $M_2$  лежат на ортогональном круге. Среди окружностей сопряженного пучка есть одна неевклидова прямая. Пусть  $P_1$ ,  $P_2$  точки пересечения этой прямой с неевклидовыми прямыми, относительно которых производится инверсия. Если обозначим через  $\frac{1}{2}h$  неевклидово



расстояние  $P_1P_2$ , то движение может быть рассматриваемо как сдвиг неевклидовой плоскости на расстояние h вдоль неевклидовой прямой  $M_1P_1P_2M_2$ . Фиксируя неевклидову прямую  $M_1M_2$  и меняя h, мы получим однопараметрическую группу движений, при которых переходят в самих себя дуги окружностей, лежащие на неевклидовой плоскости и соединяющие точки  $M_1$  и  $M_2$ . Эти дуги называются линиями равного расстояния (гиперциклами). Гиперцикл может быть определен как геометрическое место точек, неевклидово расстояние которых до данной неевклидовой прямой постоянно.

Наконец, если две инверсии производятся относительно параллельных неевклидовых прямых (§ 37) с общей граничной точкой L, полученное неевклидово движение называется предельным вращением (Grenzdrehung).

Пусть даны две пары неевклидовых параллельных прямых LM, LN и  $L_1M_1$ ,  $L_1N_1$ ; всегда существует неевклидово движение, преобразующее одну из этих пар в другую, именно, преобразование, переводящее точки LMN в точки  $L_1M_1N_1$ . Отсюда следует, что с точки зрения неевклидовой геометрии все предельные вращения эквивалентны, или, точнее, они могут различаться только направлением вращения. Для предельного вращения, полученного инверсиями относительно LM и LN, точка L есть единственная фиксированная точка. Окружности неевклидовой плоскости, касающиеся ортогонального круга в точке L, при этом вращении переходят сами в себя; эти окружности называются предельными линиями (орициклы).

47. Каждая обычная окружность, находящаяся целиком внутри неевклидовой плоскости, есть, таким образем, неевклидова окружность, и нетрудно найти ее неевклидов центр. Подобным же образом каждая окружность, касающаяся ортогонального круга изнутри, есть предельная линия, и каждая дуга окружности, упирающаяся своими концами в ортогональный круг, есть линия равного расстояния. Кривые этих трех типов суть единственные кривые неевклидовой плоскости, имеющие постоянную и отличную от нуля кривизну. Соответственно с § 44 кривизна предельной линии (пренебрегая знаком) равна двум, для линии равного расстояния меньше двух и для неевклидовой окружности больше двух. Кривизна h и неевклидов радиус r такой окружности связаны соотношением

$$k = 2 \frac{e^{2r} + e^{-2r}}{e^{2r} - e^{-2r}}.$$
 (47,1)

48. Параллельные кривые. Рассмотрим совокупность неевклидовых кругов данного неевклидова радиуса r, центры которых образуют произвольное множество A точек неевклидовой плоскости. Эти круги покрывают множество точек B(r), граница которого, если она существует, содержит все точки неевклидовой плоскости, находящиеся на расстоянии r от множества A. Если множество A состоит, ча точек кривой C конечной кривизны, то, изменяя r в достаточно малых пределах, мы получим семейство параллельных кривых (в смысле неевклидовой метрики). Можно доказать точно таким же путем, как и в других подоб-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> При  $r < \frac{\pi}{2}$  имеем:  $k = \frac{1}{r} + \frac{4}{3}r^2 - \frac{16}{45}r^3 + \dots$ 

ного рода задачах вариационного исчисления <sup>1</sup>, что ортогональные траектории такого семейства эквидистантных параллельных кривых совпадают с неевклидовыми прямыми.

Обратно, ортогональные траектории семейства неевклидовых прямых, не пересекающихся в некотором участке неевклидовой плоскости, образуют семейство параллельных кривых в выше указанном смысле. Приведем следующие простейшие примеры таких семейств параллельных кривых:

- а) неевклидовы окружности с общим центром;
- b) предельные линии, имеющие общую точку касания с ортогональным кругом;
- с) линии равного расстояния с общими конечными точками (см. фиг. 10).

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Cm. Frank und v. Mises, Die Differential- und Integralgieichungen der Mechanik und Physik, Bd. I, Kap. 5.

### Глава III

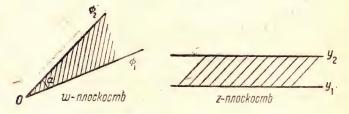
# элементарные преобразования

# 49. Показательная функция. Функция

$$w = e^{z} \tag{49,1}$$

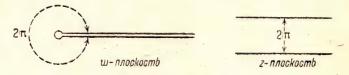
реализует два важные преобразования. Вводя прямоугольные координаты x, y в z-плоскости и полярные координаты  $\rho$ ,  $\varphi$  в w-плоскости,  $\varphi$  т. е. полагая z=x+iy и  $w=\rho e^{i\varphi}$ , мы заменим (49,1) двумя уравнениями

$$\rho = e^x$$
,  $\varphi = y$ .



Фиг. 12.

Эти равенства показывают, что горизонтальная полоса z-плоскости, ограниченная прямыми  $y=y_1$  и  $y=y_2$ , при  $|y_1-y_2|<2\pi$  отображается на угол величиною  $\alpha=|\varphi_2-\varphi_1|=|y_2-y_1|$ . Ото-



Фиг. 13.

бражение конформно внутри этих областей, так как производная от  $e^{z}$  не обращается в нуль. В частном случае, если  $|y_2-y_1|=\pi$  (например, когда  $y_1=0$ ,  $y_2=\pi$ ), угол разворачивается в полуплоскость.

Ограничение, наложенное на полосу,  $|y_1 - y_2| < 2\pi$ , может быть отброшено. Если, например,  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 2\pi$ , полоса ото-

бражается на w-плоскость, разрезанную вдоль положительной части действительной оси; если же  $|y_1-y_2|>2\pi$ , полученный угол покрывает w-плоскость многократно.

Особенно важен случай, когда  $|y_1-y_2|$  равно целому кратному  $2\pi$ ; в этом случае полоса отображается на алгебраическую поверхность Riemann'а с одной точкой ветвления, рассеченную вдоль одного листа [4].

50. Второе специальное отображение, осуществляемое функцией  $w=e^{z}$ , мы получим, рассматривая вертикальную полосу,

ограниченную прямыми  $x = x_1$ ,  $x = x_2$ .

Эта полоса отображается на риманову поверхность, покрывающую бесконечное число раз кольцо  $\rho_1 < |w| < \rho_2$ ; полученная поверхность называется (односвязной) поверхностью наложения (Überlagerungsfläche) кольца. Если теперь фиксируем  $x_2$ 

и будем стремить  $x_1$  в  $\infty$ , в пределе полоса перейдет в полуплоскость  $\Re(z) < x_2$ , а вместо поверхности наложения кольца получим риманову поверхность, покрывающую круг  $|w| < \rho_2$  и имеющую логарифмическую точку при w=0.

51. Обратная функция по отношению к (49,1)

Фиг. 14.

$$w = \ln z \qquad (51,1)$$

дает точно те же конформные отображения, переставляя роли w-и z-плоскости.

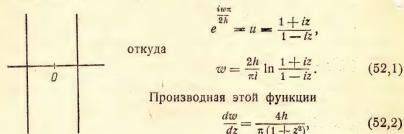
Ряд задач конформного отображения, важных при доказательствах общих теорем, может быть решен комбинированием предыдущих преобразований с преобразованиями Möbius'a, рассмотренными в первой главе.

52. Отображение прямолинейной полосы на круг. Прямолинейная полоса

$$|\Re(w)| < h$$

может быть конформно отображена на круг |z| < 1 таким образом, чтобы точка w = 0 перешла в точку z = 0 и параллельные направления в этих точках соответствовали друг другу. В самом деле, по § 49, полоса может быть отображена на полуплоскость, а затем, по § 12, полуплоскость на круг. Если про-

межуточная полуплоскость находится в плоскости комплексного переменного и, то



согласно с условиями задачи, положительна Фиг. 15. при z = 0. Если z описывает единичный круг

 $z = e^{i\theta}$ , то, снова в соответствии с условиями,

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{2hi}{\pi \cos \theta}$$

принимает чисто мнимые значения.

Если точка z описывает окружность |z|=r<1, точка wописывает кривую, находящуюся целиком внутри некоторого конечного круга и форму которой нетрудно определить; на этой кривой по (52,1)

$$|\Im(w)| \leq \frac{2h}{\pi} \ln \frac{1+r}{1-r}.$$
 (52,3)

Это неравенство имеет много приложений.

53. Произвольный угол, величину которого обозначим πα, а вершину предположим помещенной в начале координат, может быть преобразован в полуплоскость. В самом деле, если в соотношение

$$w = z^{\alpha} = e^{\alpha \ln s} \tag{53,1}$$

введем полярные координаты

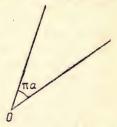
$$z = re^{i\theta}, \ w = \rho e^{i\varphi}, \tag{53,2}$$

оно заменится двумя

$$\rho = r^{\alpha}, \quad \varphi = \alpha \theta, \tag{53,3}$$

которые показывают, что (53,1) реализует требуемое преобразование  $^{\mathbf{1}}$ . Комбинируя (53,1) с преобразованием Möbius  $^{\mathbf{1}}$ а, можно

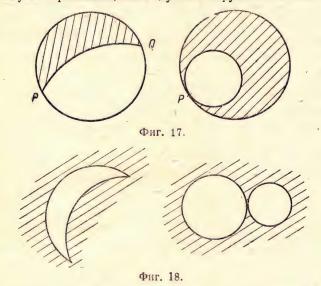
отобразить угол на внутреннюю область круга. Соотношения (53,3) показывают, что отображение угла на полуплоскость (или на круг) конформно во всех точках, лежащих внутри и на границе этого угла, за исключением его вершины w=0. Две кривые, пересекающиеся в точке w=0 под углом  $\lambda$ , переходят в кривые, пересекающиеся под углом  $\frac{\lambda}{\alpha}$ , и, следовательно, в начале координат соответ-



Фиг. 16.

ствующие друг другу углы не равны, а пропорциональны; отображение в этой точке называется квази-конформным.

54. Отображение круговых луночек. Область, заключенная между двумя пересекающимися дугами окружностей или между



двумя касающимися окружностями, преобразованием Möbius'a, переводящим одну из общих этим окружностям точек в беско-

<sup>1</sup> Если сначала преобразуем угол в полосу (§ 49), а затем полосу в полуплоскость (§ 52), то снова придем к (53,1).

нечность, отображается на угол или на полосу. Следовательно, по-предыдущему каждая такая луночка может быть отображена конформно на внутреннюю область круга.

Таким же путем внешняя область луночки или внешняя область двух кругов, касающихся друг друга извне, могут быть

отображены на внутреннюю область круга.

55. Отображения римановых поверхностей. Если  $\alpha$  равно положительному целому числу n, функция (53,1) дает отображение единичного круга |z| < 1 на n-листную поверхность Riemann'а, покрывающую круг |w| < 1 и имеющую n-кратную точку ветвления при w = 0.

56. Нам нужно будет определить функцию, отображающую единичный круг |z| < 1 на риманову поверхность, отличающуюся от поверхности, описанной в § 55, тем, что ее точка ветвления

находится при  $w = w_0$ .

Мы потребуем еще, чтобы точка w = 0 переходила в точку z = 0 и одинаковые направления в этих точках соответствовали друг другу.

Предположим сперва, что  $w_0$  равно положительному числу

h(h < 1) и преобразованием Möbius'а (§ 35)

$$w = \frac{h - u}{1 - hu} \tag{56,1}$$

переведем точку ветвления римановой поверхности в начало координат. Функция  $u=t^n$  отображает (§ 55) полученную риманову поверхность на однолистный (schlicht) 1 круг |t|<1,

и точка этого круга  $t=h^{\frac{1}{n}}$  соответствует точке w=0. Поэтому искомое преобразование имеет вид:

$$t = \frac{h^{\frac{1}{n}} - z}{1 - h^{\frac{1}{n}} z}$$

или, в переменных г и ш

$$w = h \frac{(1 - h^{\frac{1}{n}} z)^n - (1 - h^{-\frac{1}{n}} z)^n}{(1 - h^{\frac{1}{n}} z)^n - h^2 (1 - h^{-\frac{1}{n}} z)^n}.$$
 (56,2)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Поверхность Riemann'а однолистна (schlicht), если она не имеет вух различных точек с одинаковыми координатами.

Разлагая по биному, видим, что

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=0} = \frac{nh\left(h^{-\frac{1}{n}} - h^{\frac{1}{n}}\right)}{1 - h^2} > 0.$$
 (56,3)

В общем случае, когда  $w_0 = he^{i\theta}$ , искомое преобразование будет

$$w = he^{i\theta} \frac{(1 - h^{\frac{1}{n}}e^{-i\theta}z)^n - (1 - h^{-\frac{1}{n}}e^{-i\theta}z)^n}{(1 - h^{\frac{1}{n}}e^{-i\theta}z)^n - h^2(1 - h^{-\frac{1}{n}}e^{-i\theta}z)^n}.$$
 (56,4)

57. Случай, когда риманова поверхность имеет логарифмическую точку ветвления  $w_0=h$ , разбирается аналогичным образом. Прежде всего преобразование (56,1) отображает эту риманову поверхность на поверхность, уже рассмотренную в § 50; в том же параграфе показано, что преобразование  $u=e^t$  отображает полученную поверхность на полуплоскость  $\Re(t)<0$ , переводя точку u=h и, следовательно, w=0 в точку  $t=\ln h$ . Наконец, полуплоскость  $\Re(t)<0$  отображается на круг |z|<1 функцией

 $t = \frac{1+2}{1-2} \ln h,$ 

и, следовательно, функция, реализующая искомое отображение, получается в виде

$$w = \frac{h - e^{\frac{1+z}{1-z} \ln h}}{1 - h e^{\frac{1+z}{1-z} \ln h}} = h \frac{1 - e^{\frac{2z}{1-z} \ln h}}{1 - h^2 e^{\frac{2z}{1-z} \ln h}}.$$
 (57,1)

Из этого равенства немедленно находим:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{*=0} = \frac{-2h\ln h}{1-h^2} > 0.$$
 (57,2)

58. Поверхность Riemann'a, рассмотренная в § 56, при неограниченном возрастании n переходит в пределе в поверхность Riemann'a § 57, имеющую логарифмическую точку ветвления. Поэтому можно ожидать, что, обозначая через  $\varphi_n(z)$  правую часть (56,2) и через  $\psi(z)$  правую часть (57,1), мы получим соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \psi(z). \tag{58,1}$$

Равенство (58,1), правда, может быть получено из одной общей теоремы, но может быть также выведено следующим прямым путем.

В уравнении

$$\frac{(h^{\frac{1}{n}} - z)^n}{(1 - h^{\frac{1}{n}} z)^n} = e^{n \left\{ \ln (h^{\frac{1}{n}} - z) - \ln (1 - h^{\frac{1}{n}} z) \right\}}$$
 (58,2)

положим  $h^{\frac{1}{n}}=1-\varepsilon_n$ , тогда  $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ . Показатель при e в (58,2) может быть теперь записан в виде:

$$\ln h \left\{ \frac{\ln (1-z-\varepsilon_n) - \ln (1-z+\varepsilon_n z)}{\ln (1-\varepsilon_n)} \right\},\,$$

и, так как є, стремится к нулю, предел этого выражения будет

$$\frac{1+z}{1-z}\ln h;$$

отсюда немедленно следует (58,1). Таким же образом можно убедиться, что (56,3) в пределе переходит в (57,2).

59. Можно показать, что при всяком п

$$\varphi'_n(0) > \varphi'_{n+1}(0).$$
 (59,1)

Для доказательства (59,1) полагаем  $\ln h^{\frac{1}{n}} = -\lambda_n$ , тогда  $\lambda_{n+1} < \lambda_n$ , но из (56,3)

$$\varphi_n'(0) = \left(\frac{-2h\ln h}{1-h^2}\right) \left(\frac{e^{\lambda_n} - e^{-\lambda_n}}{2\lambda_n}\right),\,$$

причем функция

$$\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2\lambda}=1+\frac{\lambda^2}{3!}+\frac{\lambda^4}{5!}+\dots$$

убывает вместе с λ.

60. Отображение круга на внешнюю область эллипса. Мы начнем с рассмотрения задачи об отображении ш-плоскости, разрезанной вдоль отрезка —  $\alpha < w < +\alpha$ , где  $\alpha$  — произвольное положительное число, на внешнюю область единичного круга |z| > 1 так, чтобы при этом точки  $w = \infty$  и  $z = \infty$  соответствовали друг другу.

Преобразование Möbius'a

$$u = \frac{w - \alpha}{w + \alpha}, \quad w = \alpha \frac{1 + u}{1 - u}$$

преобразует w-плоскость с купюрой на u-плоскость, рассеченную вдоль отрицательной части действительной оси, и полученная область преобразованием  $u=t^2$  отображается на полуплоскость  $\Re(t)>0$ . При этом точке  $w=\infty$  соответствуют точки u=1 и t=1; полагая

$$z = \frac{1+t}{1-t},$$

мы получим искомое отображение. Это дает в окончательной форме

$$w = \frac{\alpha}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right); \tag{60,1}$$

преобразование (60,1) замечательно тем, что оно дает отображение разрезанной w-плоскости не только на внешнюю область, но также и на внутреннюю область единичного круга.

61. Если в (60,1) мы положим

$$z = re^{i\theta}$$
,

где (для определенности) r > 1, то получим:

$$w = \frac{\alpha}{2} \left\{ \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \right\}; \tag{61,1}$$

это показывает, что кругу |z|=r на w-пловкости соответствует эллипс с полуосями

$$a = \frac{a}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right), \quad b = \frac{a}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right).$$
 (61,2)

Обратно, если заданы a и b, то из (61,2) находим:

$$\alpha = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad r = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$$
 (61,3)

Преобразование (60,1) отображает внешнюю область круга |z| > r > 1 (или внутреннюю область круга  $|z| < \frac{1}{r} < 1$ ) на внешнюю область эллипса (61,1).

Отображение внутренней области эллипса на внутреннюю область единичного круга не может быть получено элементарными преобразованиями. Заметим, что функция (60,1) отображает

верхнюю половину эллипса (61,1) на верхнюю часть кольца, разрезанного вдоль действительной оси. Эту последнюю область, а следовательно, и полуэллипс легко отобразить (методами § 50) на прямоугольник. Подробности этих вычислений, которые сводятся к тригонометрическим функциям, мы предоставляем читателю [6].

62. Отображение произвольной односвязной области на ограниченную область. Под областью мы подразумеваем открытое и связное множество точек комплексной плоскости; таким образом открытое множество точек есть область, если любые две его точки могут быть соединены непрерывной кривой, все точки которой принадлежат к этому множеству. Граница S области T определяется как множество предельных точек T, не принадлежащих к T. Множество S+T, состоящее из точек области и ее границы, называется замкнутой областью и обозначается T. В соответствии со сделанными раньше соглашениями (см. главу 1,  $\S$  9) точка  $\infty$  может рассматриваться наравне со всеми другими точками и, в частности, может быть внутренней точкой области T.

Точкой области T. Каждое взаимно однозначное и непрерывное в точках области преобразование отображает T на некоторую область T'. Если область T не совпадает с полной комплексной плоскостью, ее граница содержит по крайней мере одну точку, и, следовательно, область T может быть отображена конформно преобразованием Möbius'а на область  $T^*$ , не содержащую точку  $z=\infty$ . 63. Нам важно важно всети классификацию областей по характеру

63. Нам важно ввести классификацию областей по характеру их связности. Область T, которая может иметь в качестве одной из своих внутренних точек точку  $z=\infty$ , называется n-связной, если ее граница состоит из n различных континуумов. Степень связности есть, очевидно, топологический инвариант, т. е. остается неизменной при всяком взаимно однозначном и непрерывном преобразовании.

Мы будем здесь заниматься односвязными областями, граница которых состоит из одного континуума. Свойство, выражаемое словами "односвязная", может быть охарактеризовано многими другими способами. Топологическими методами можно доказать, что все эти характеристические свойства эквивалентны друг другу. Вот несколько примеров таких свойств:

многими другими спосооами. Гопологическими методами можно доказать, что все эти характеристические свойства эквивалентны друг другу. Вот несколько примеров таких свойств:

а) Область  $T^*$ , не содержащая бесконечно удаленной точки, односвязна тогда и только тогда, когда внутренность каждого полигона, граница которого принадлежит к  $T^*$ , состоит из точек  $T^*$ .

- b) Область T односвязна тогда и только тогда, когда каждая кривая  $\gamma$ , соединяющая две точки S и лежащая внутри T, разбивает T на две области.
- с) Для того чтобы T была односвязной, необходимо и достаточно, чтобы всякая замкнутая кривая, принадлежащая к ней, могла быть сведена в точку непрерывными деформациями внутри T (в процессе деформации кривая может пройти через бесконечно удаленную точку).

d) Область T односвязна, если ее можно отобразить взаимно

однозначно и непрерывно на внутреннюю область круга.

е) Теорема о монодромности может быть рассматриваема как определяющая характеристическое свойство односвязных областей  $T^*$ , не содержащих точку  $\infty$ . Это свойство чрезвычайно важно для теории функций. Оно гласит:

Теорема 1: Область  $T^*$ , не содержащая бесконечно удаленную точку, односвязна, если продолжаемость аналитической функции f(z) по всякой кривой, принадлежащей к  $T^*$ , влечет за собой однозначность f(z) в области  $T^*$ .

Под этим подразумевается следующее: если в некоторой точке области  $T^*$  задан элемент аналитической функции, то или аналитическое продолжение этого элемента по путям, принадлежащим  $T^*$ , приводит в каждой точке области лишь к одному значению функции, или функция, полученная аналитическим продолжением этого элемента, имеет особую точку в области  $T^*$ .

Каждый круг, например единичный круг |z| < 1, будет при этом определении односвязной областью. Коебе в своих лекциях доказывает это следующим образом: функция f(z), продолжаемая по всем кривым внутри единичного круга, должна выражаться в окрестности точки z=0 степенным рядом

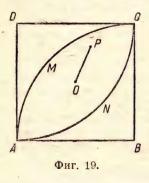
$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$
 (63,1)

Если бы радиус сходимости этого ряда был меньше единицы, аналитическое продолжение f(z) было бы невозможно вдоль котя бы одного радиуса круга |z| < 1. Следовательно, при всех аналитических продолжениях внутри круга значения f(z) могут быть вычислены из (63,1), и функция f(z) однозначна.

Из этого следует, что область, которую можно привести конформным преобразованием во взаимнооднозначное и непрерывное соответствие с кругом |z| < 1, односвязна. Например, полуплоскость (§ 12), полукруг (§ 54), круговая четверть (§ 53) односвязны. Теперь можно также убедиться, что квадрат односвязен, так как он может быть получен как сумма двух круговых

четвертей; каждая точка Р, принадлежащая к общей части обеих четвертей, может быть соединена с центром квадрата отрезком прямой, лежащим внутри ABCM и внутри ANCD и, следовательно, теорема монодромности имеет место.

64. Пусть Т односвязная область комплексной г-плоскости. граница которой содержит по меньшей мере две различные точ-



ки  $A_1$ ,  $B_1$ , и пусть  $z_0$  внутренняя точка области T, отличная от точки  $z=\infty$ . Рассмотрим дугу круга (которая может быть конечным или бесконечным отрезком прямой линии), соединяющую  $A_1$ и  $B_1$  и содержащую точку  $z_0$  в качестве внутренней точки; обозначим через А первую точку, встречающуюся при движении по дуге от точки  $z_0$ к точке  $A_1$ , и через B соответствующую точку на дуге  $z_0B_1$ . Тогда все внутренние точки дуги  $Az_0B$  принадлежат к области Т, а концы к ее границе.

Если теперь произведем преобразование Möbius'a, переводящее точки A,  $z_0$ , B z-плоскости в точки  $0,1,\infty$  u-плоскости, область T перейдет в односвязную область  $T_1$ , для которой точки u = 0 и  $u = \infty$  будут граничными точками, а все точки положительной части действительной оси — внутренними точками.

Применяя теперь преобразование  $u = v^4$ , мы получим четыре различные области v-плоскости, соответствующие области  $T_1$ ; пусть  $T_2$  та из этих областей, которая содержит прямую v > 0, соответствующую прямой u > 0 1. Мы покажем, что область  $T_0$ целиком лежит в полуплоскости  $\Re(v) > 0$  и, следовательно, преобразованием

$$w = \frac{v - 1}{v + 1} \tag{64,1}$$

отображается на область, лежащую внутри круга |w| < 1. Если бы область  $T_2$  содержала точку  $v_2$ , для которой  $\Re \left(v\right) \leqslant 0$ , мы могли бы провести кривую, соединяющую точки  $v_1 = 1$  и  $v_2$  и лежащую в области  $T_2$ .

Пусть P первая точка пересечения, считая от  $v_1$ , этой кривой с мнимой осью у-плоскости, а Q последняя точка пересечения дуги, соединяющей  $v_1$  и P с действительной осью; дуга

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Каждая из областей, соответствующих  $T_1$ , в частности  $T_2$ , однолистна (см. примечание в § 56).

PQ, которую мы обозначим  $\gamma_v$ , целиком лежит внутри первого или четвертого квадранта v-плоскости. Преобразование  $u=v^4$  преобразует дугу  $\gamma_v$  в кривую  $\gamma_u$ , все точки которой принадлежат к  $T_1$  и концы которой расположены на положительной части действительной оси u>0; добавляя к  $\gamma_u$  участок оси u>0, мы получим замкнутую кривую, целиком лежащую в области  $T_1$  и окружающую точку u=0. Но такой кривой не может существовать, так как  $T_1$  односвязна и не содержит ни одной из точек u=0 и  $u=\infty$ .

Таким образом доказано:

Теорема 2: Всякая односвязная область, граница которой содержит по крайней мере две различные точки, может быть отображена элементарными конформными преобразованиями на область, целиком лежащую внутри единичного круга.

Такая же теорема точно тем же путем доказывается для всякой многосвязной области, граница которой содержит по меньшей мере один континуум, не сводящийся к точке.

65. Следующая теорема, данная Koebe (12) и на первый взгляд мало отличная от теоремы §64, играет большую роль в общей теории вследствие указания величин входящих констант.

Пусть T однолистная односвязная область плоскости w, не содержащая точки  $w=\infty$ ; предположим, далее, что круг |w|<1 содержится в области T и что w=1 есть граничная точка области T. Преобразование

$$w = \frac{4(1+\sqrt{2}^2)^2 z}{\{1+(1+\sqrt{2})^2 z\}^2}$$
 (65,1)

отображает область T на однолистную и односвязную область T', лежащую внутри единичного круга |z| < 1 и содержащую фиксированный круг  $|z| < (1 + \sqrt{2})^{-4}$ .

Рассмотрим на w-плоскости двулистную поверхность Riemann'а с точками ветвления w=1 и  $w=\infty$ . Преобразование

$$1 - w = u^2 \tag{65,2}$$

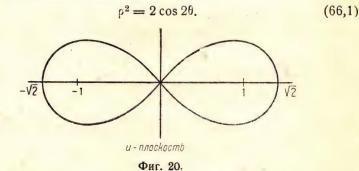
отображает эту поверхность на однолистную u-плоскость, переводя точку w=0 в две точки  $u=\pm 1$  и всякую кривую области T, выходящую из точки w=0, в две кривые на u-плоскости. Совокупность всех кривых на u-плоскости, соответствующих кривым области T и выходящих из точки  $u=\pm 1$ , заполняет односвязную область, которую мы обозначим  $T_1$ .

Мы докажем, что, каково бы ни было комплексное число  $u_0$ , область  $\mathcal{I}_1$  не может содержать одновременно обе точки  $\pm u_0$ .

Для этого соединим две точки  $\pm u_0$  кривой  $\gamma_u$ , лежащей внутри  $T_1$ ; кривой  $\gamma_u$  на w-плоскости соответствует замкнутая кривая  $\gamma_w$ , лежащая внутри T, одна из точек которой  $w_0$  соответствует концам  $\pm u_0$  кривой  $\gamma_u$ .

Так как область T односвязна, кривую  $\gamma_w$  можно непрерывной деформацией стянуть в сколь угодно малую окрестность точки  $w_0$ , оставляя точку  $w_0$  неподвижной. Но при этой деформации конечные точки кривой  $\gamma_u$  остаются неподвижными, и мы, очевидно, приходим к противоречию.

66. Уравнение (65,2) переводит круг |w| = 1 в самопересекающуюся кривую четвертого порядка, уравнение которой в полярных координатах имеет вид:



Эта кривая симметрична относительно начала координат; одна из двух областей, ограниченных ее петлями, лежит внутри области  $T_1$  и, следовательно, другая расположена целиком вне  $T_1$  (§ 65).

Функция

$$t = \frac{1 - u}{1 + u} \tag{66,2}$$

преобразует кривую (66,1) в кривую C, изображенную на фиг. 21 и имеющую двойную точку при t=1; эта функция отображает  $T_1$  на область  $T_2$ , целиком лежащую внутри кривой C, так как внешняя область C соответствует той петле кривой (66,1), которая не содержит ни одной точки области  $T_1$ . Отсюда следует, что внутренняя петля кривой C содержится внутри  $T_2$ ; (65,2) и (66,2) дают

$$t = \frac{1 - \sqrt{1 - w}}{1 + \sqrt{1 - w}} = \frac{\{1 - \sqrt{1 - w}\}^2}{w},$$
 (66,3)

и отсюда получаем, что при |w| = 1,  $|t| < (1 + \sqrt{2})^2$ .

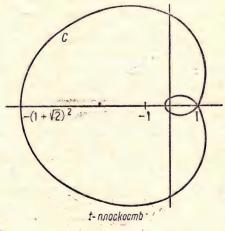
Следовательно,  $T_2$  лежит целиком внутри круга радиуса  $(1+\sqrt{2})^2$ . Так как кривая C совпадает со своей инверсией относительно единичного круга |t|=1, мы видим, что область  $T_2$  должна содержать круг

 $|t| \leq (1 + \sqrt{2})^{-2}$ .

Теорема, высказанная в начале § 65, получится, если в равенстве (66,3), выражающем w как функцию t, мы положим теперь

$$t = (1 + \sqrt{2})^2 z$$
; (66,4)

так как по предположению T не содержит точку  $w=\infty$ , то  $T_1$  не содержит  $u=\infty$ ; следовательно, t=-1 лежит вне  $T_2$  и, наконец,  $z=-(1+\sqrt{2})^{-2}$  лежит вне области T'.



Фиг. 21.

Примечание. Пусть  $T^*$  односвязная область, содержащаяся в T и содержащая точку w=0; обозначим границу  $T^*$  через  $\gamma_w$ . Преобразование (65,2) приводит к двум различным областям u-плоскости, соответствующим  $T^*$ . Одна из этих областей содержит точку u=+1 и другая u=-1; их границы обозначим соответственно через  $\gamma_u'$  и  $\gamma_u''$ . Каждой точке u', границы  $\gamma_u'$ , соответствует точка u''=-u' на  $\gamma_u''$ . Преобразование (66,2) отображает две рассматриваемые области на две различные односвязные области t-плоскости. Одна из них  $T_t^*$  содержит точку t=0 и состоит из точек, лежащих внутри некоторого континуума  $\gamma_t'$ ; другая состоит из точек, лежащих вне континуума  $\gamma_t''$ ; так как эти области не имеют общих точек,  $\gamma_t''$  окружает  $\gamma_t'$ . Преобразование  $t''=-\frac{1}{t'}$  отображает  $\gamma_t'$  и  $\gamma_t''$  друг на друга.

## Глава IV

### JIEMMA SCHWARZ'A

67. Теорема Schwarz'а. За точку отправления мы возьмем следующее замечание: если произвольная аналитическая функция регулярна в замкнутой области  $\overline{T}$ , максимум значений |f(z)| достигается в точке границы S области  $\overline{T}$ . Известное доказательство этой теоремы основывается на том элементарном факте, что для любой не обращающейся в константу аналитической функции всякая окрестность регулярной точки  $z_0$  содержит точку  $z_1$  такую, что  $|f(z_1)>|f(z_0)|$ . Рассмотрим теперь функцию f(z), удовлетворяющую следующим трем условиям: 1) f(z) регулярна в круге |z|<1, 2) во всех точках этого круга |f(z)|<1, 3) f(0)=0. Из условий 1) и 3) следует, что функция

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z} \tag{67,1}$$

также регулярна в круге |z| < 1; следовательно, если  $z_0$  точка, лежащая внутри единичного круга, и r— положительное число, заключенное между  $|z_0|$  и единицей, то на окружности замкнутого круга  $|z| \le r$  существует точка  $z_1$  такая, что  $|\varphi(z_1)| \ge |\varphi(z_0)|$ . Но по предположению  $|f(z_1)| < 1$  и  $|z_1| = r$ , поэтому

$$|\varphi(z_0)| \leq |\varphi(z_1)| = \frac{|f(z_1)|}{|z_1|} < \frac{1}{r},$$

u, так как r может быть произвольным числом, меньшим единицы,

$$|\varphi(z_0)| \leq 1. \tag{67,2}$$

Таким образом во всех точках единичного круга  $|\varphi(z)| \leq 1$ , если  $\varphi(z)$  отлична от постоянной, это неравенство может быть заменено для внутренних точек неравенством  $|\varphi(z)| < 1$ . В самом деле, если  $\varphi(z)$  не постоянна и существует внутренняя точка  $z_0$ , в которой  $|\varphi(z_0)| = 1$ , то необходимо существует другая внутренняя точка, в которой  $|\varphi(z)| > 1$ , а это противоречит неравенству (67,2). Вспоминая теперь (67,1), приходим к следующему результату.

Теорема 1: Лемма Schwarz'a. Если при |z| < 1 аналитическая функция f(z) регулярна и если |f(z)| < 1 и f(0) = 0, то или

$$|f(z)| < |z| \tag{67,3}$$

npu |z| < 1, или f(z) есть линейная функция вида

$$f(z) = e^{i\theta} z, \tag{67,4}$$

где в — действительное число.

Из (67,1)  $\varphi(0) = f'(0)$ , и наши рассуждения тотчас приводят к теореме

Теорема 2: Если f(z) удовлетворяет условиям леммы Schwarz'a, то либо |f'(0)| < 1, либо f(z) линейная функция

вида (67,4).

68. Теорема о единственности конформных отображений односвязных областей. Вот одно из простейших, но наиболее важных приложений леммы Schwarz'a. Пусть G односвязная область w-плоскости, содержащая начало координат w=0; допустим, что существует функция f(z), отображающая область G конформно на круг |z| < 1 и такая, что f(0) = 0 и f'(0) положительна. Мы докажем, что функция f(z), удовлетворяющая этим условиям, единственна.

Допустим, что существует вторая функция g(t), отличная от f(z) и удовлетворяющая тем же условиям; тогда уравнение

$$g(t) = f(z) \tag{68,1}$$

дает отображение круга |t| < 1 на круг |z| < 1, причем центры t=0 и z=0 соответствуют друг другу. Обе функции

$$t = \varphi(z), \ z = \psi(t), \tag{68,2}$$

полученные решением уравнения (68,1), удовлетворяют условиям леммы Schwarz'a, и, следовательно, (§ 67) для каждой пары значений z, t, удовлетворяющих уравнению (68,1), выполняются неравенства  $|t| \leq |z|$ ,  $|z| \leq |t|$ , т. е.  $|t| = |\varphi(z)| = |z|$ .

Применяя снова лемму Schwarz'a, заключаем, что  $\varphi(z) = e^{i\theta}z$ . Но из сделанных предположений следует  $\varphi'(0) > 0$ , и потому

 $\varphi(z) \equiv z$  или

$$f(z) = g(\varphi(z)) = g(z),$$

и, следовательно, f(z) единственна.

69. Теорема Liouville'я. Большое число важных теорем можно получить, комбинируя лемму Schwarz'a с другими предыдущими теоремами. В качестве примера мы упомянем теорему Liouville'я о том, что всякая ограниченная целая функция есть константа. Пусть F(z) — целая функция, такая, что |F(z)| < M при всех значениях z. Положим z = Ru

$$f(u) = \frac{F(z) - F(0)}{2M}.$$

Функция f(u) удовлетворяет условиям леммы Schwarz'а при любом значении R. Следовательно, при  $|u| \le 1$ ,  $|f(u)| \le |u|$ , т. е. если |z| < R,

 $|F(z)-F(0)|<\frac{2M}{R}|z|.$ 

Фиксируя z и устремляя R в бесконечность, получаем F(z) = F(0). 70. Инвариантная формулировка леммы Schwarz'а. Пусть w = f(z) регулярна в круге |z| < 1 и удовлетворяет неравенству f(z)| < 1; мы не предполагаем теперь, что f(0) = 0. Обозначив через  $z_0$  точку, лежащую внутри единичного круга, преобразуем единичный круг z-плоскости и единичный круг w-плоскости на самого себя преобразованиями Möbius'а (§ 35)

$$t = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \omega = \frac{w - f(z_0)}{1 - \overline{f}(z_0) w} = \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f}(z_0) f(z)}. \quad (70,1)$$

Функция  $\omega = \omega(t)$ , полученная исключением z из уравнений (70,1), удовлетворяет всем условиям леммы Schwarz'а, и потому

$$|\omega(t)| \leq |t|. \tag{70,2}$$

Это неравенство показывает, что неевклидово расстояние  $D\left(0,\omega\left(t\right)\right)$  между двумя точками  $\omega\left(0\right)=0$  и  $\omega\left(t\right)$  не превосходит неевклидово расстояние между точками 0,t; вспоминая, что по доказанному в главе II неевклидово расстояние инвариантно относительно преобразования (70,1), получаем следующую теорему, заключающую лемму Schwarz'а как частный случай и высказанную впервые G. Pick'ом (14).

Теорема 3: Пусть f(z) аналитическая функция, регулярная и удовлетворяющая неравенству |f(z)| < 1 в круге |z| < 1; тогда, или для каждых двух точек  $z_1$ ,  $z_2$ , принадлежащих к внутренности единичного круга, выполняется неравенство

$$D(f(z_1), f(z_2)) < D(z_1, z_2),$$
 (70,3)

или для каждых двух таких точек

$$D(f(z_1), f(z_2)) = D(z_1, z_2).$$
 (70,4)

Если выполняется равенство (70,4), функция w = f(z) совпадает с преобразованием Möbius a, отображающим единичный круг на самого себя.

71. Диференцируя уравнения (70,1) по г, получаем

$$\omega'(t) \frac{1 - z_0 \overline{z_0}}{(1 - z \overline{z_0})^2} = \frac{1 - f(z_0) \overline{f}(z_0)}{\{1 - f(z) \overline{f}(z_0)\}^2} f'(z);$$

полагая  $z=z_0$  и t=0 и применяя к  $\omega(t)$  теорему 2, § 67, находим:

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2};$$

так как  $z_0$  произвольно, мы приходим к теореме

Теорема 4: Если f(z) удовлетворяет условиям теоремы 3, то либо

$$|f'(z)| < \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}$$
 (71,1)

во всех точках, лежащих внутри единичного круга, либо всюду выполняется равенство

$$|f'(z)| = \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2};$$
 (71,2)

равенство (71,2) имеет место тогда и только тогда, когда выполняется (70,4).

Из (71,1) и (71,2) немедленно следует, что при  $|z| \leqslant r < 1$ 

$$|f'(z)| \le \frac{1}{1-r^2}$$
 (71,3)

Обозначая через  $z_1$  и  $z_2$  две точки замкнутого круга  $|z| \le r$  и интегрируя вдоль прямолинейного отрезка, получаем соотношение

$$\int_{z_{1}}^{z_{2}} f'(z) dz = f(z_{2}) - f(z_{1}),$$

из которого непосредственным применением теоремы о среднем выводим:

Теорема 5: Если функция f(z) удовлетворяет условиям теоремы 3, для каждой пары точек,  $z_1$ ,  $z_2$ , принадлежащих замкнутому кругу  $|z| \leqslant r < 1$ , то выполняется неравенство

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \le \frac{1}{1 - r^2}.$$
 (71,4)

72. В качестве последнего приложения соотношений (70,1) и (70,2) мы выберем следующее: разрешая второе из уравнений (70,1) относительно f(z) и полагая  $z_0 = 0$ , получаем

$$f(z) = \frac{\omega + f(0)}{1 + \overline{f}(0) \omega}; \qquad (72,1)$$

но при  $z_0 = 0$  первое из уравнений (70,1) дает t = z, а тогда из (70,2) вытекает  $|\omega| \le |z|$ . Поэтому (72,1) есть преобразование Möbius'a, переводящее круг  $|\omega| \le |z|$  в другой круг, который нетрудно построить; рассматривая полученную фигуру, без затруднений приходим к такой теореме:

Теорема 6: Если f(z) регулярна и удовлетворяет неравенcmsy |f(z)| < 1 s  $\kappa pyre |z| < 1$ , mo

$$f(z) \le \frac{|z| + |f(0)|}{1 + |f(0)||z|} \tag{72.2}$$

во всем единичном круге.

Наконец, из (72,2) простыми преобразованиями выводим

$$\frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} \geqslant \frac{1 - |f(0)|}{1 + |f(0)||z|} \geqslant \frac{1 - |f(0)|}{1 + |f(0)|}. \tag{72,3}$$

73. Теорему 3 § 70 можно рассматривать как частный случай одной весьма общей теоремы, доказательство которой мы теперь приведем. Если f(z) регулярна в единичном круге и удовлетворяет во всех точках этого круга неравенству |f(z)| < 1, всякой кривой ү, лежащей целиком внутри единичного круга z-плоскости, соответствует на w-плоскости кривая үм, лежащая целиком внутри круга | w | < 1. Если кривая γ спрямляема (в обычном смысле), ей соответствует некоторая неевклидова длина  $L(\gamma_z)$ , определяемая как верхний предел неевклидовых длин вписанных (неевклидовых) полигонов; каждому неевклидову полигону  $P_{m}$ , вписанному в  $\gamma_w$ , соответствует криволинейный полигон  $P_z$ , вписанный в 7, и по § 70 неевклидово расстояние между двумя последовательными вершинами  $P_w$  не больше, чем между соответствующими вершинами  $\vec{F}_a$ . Отсюда немедленно следует, что кривая  $\gamma_w$  спрямляема и имеет неевклидову длину  $L(\gamma_w)$ , не превосходящую  $L(\gamma_*)$ .

Если обе кривые имеют одну и ту же неевклидову длину, то соответствующие друг другу элементарные дуги кривых  $\gamma_s$ и  $\gamma_{10}$  должны быть также равны, и поэтому для каждой точки  $\gamma_{2}$  должно выполняться равенство (71,2). Применяя теорему 4, § 71,

получаем теорему:

Теорема 7: Pick'a. Если функция w=f(z) регулярна u|f(z)|<1 в единичном круге |z|<1 и если  $L(\gamma_z)$ ,  $L(\gamma_w)$  — неевклидовы длины соответствующих друг другу дуг, расположенных внутри единичных кругов, то либо

$$L\left(\gamma_{w}\right) < L\left(\gamma_{z}\right) \tag{73,1}$$

для каждой такой пары дуг, либо же w = f(z) определяет неевклидово движение и в этом случае

$$L\left(\gamma_{w}\right) = L\left(\gamma_{z}\right). \tag{73.2}$$

74. Функции с положительной действительной частью. Предположим, что в круге |z| < 1, f(z) регулярна,  $\Re f(z) > 0$  и f(0) = 1. Преобразование Möbius'а

$$u = \frac{1+w}{1-w}, \quad w = \frac{u-1}{u+1}$$
 (74,1)

отображает полуплоскость  $\Re(u) > 0$  на единичный круг |w| < 1, переводя точку u = 1 в w = 0. К функции

$$w = \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1} \tag{74.2}$$

можно применить лемму Schwarz'a, и, следовательно, область, заполняемая значениями функции u=f(z) при |z|< r (0< r<1), расположена внутри круга, получающегося преобразованием Möbius'a (74,1) из круга |w|< r. Начертив этот круг, легко убедиться, что при наших предположениях в области |z|< r выполняются неравенства

$$\frac{1-r}{1+r} < |f(z)| < \frac{1+r}{1-r},\tag{74.3}$$

$$\left|\Im f\left(z\right)\right| < \frac{2r}{11 - r^2}.\tag{74.4}$$

75. Теорема Harnack'a. Мы хотим теперь показать, что теорема Harnack'a, важность которой известна давно, есть почти очевидное следствие нашего последнего результата, и, следовательно, теорема Harnack'a может быть заменена леммой Schwarz'a. Теорема Harnack'a гласит следующее:

Теорема 8: Если  $U_1,\ U_2,\ \ldots$  — монотонно возрастающая последовательность гармонических функций, определенных в круге  $|z|<1,\ u$  если  $U_n$  сходятся к конечному пределу в точке z=0, последовательность  $U_n$  равномерно сходится во всяком круге  $|z|\leqslant r < 1$ ,

Положим

$$u_n = U_{n+1} - U_n, (75,1)$$

$$f_n(z) = u_n + iv_n, (75,2)$$

где  $v_n$  — гармоническая функция, сопряженная  $u_n$  и исчезающая в начале координат; по предположению  $\Re f_n(z)=u_n\geqslant 0$  и, следовательно, или  $u_n(0)=f_n(0)>0$ , или  $f_n(z)$  есть тождественный нуль. Функция  $\frac{f_n(z)}{u_n(0)}$  удовлетворяет условиям § 74 и по (74,3)

$$|f_n(z)| < u_n(0) \frac{1+r}{1-r}$$

при |z| < r; отсюда получаем неравенство

$$u_n < u_n(0) \frac{1+r}{1-r},$$

из которого тотчас следует теорема Нагласк'а.

76. Функции с ограниченной действительной частью. Предположим, что функция f(z) удовлетворяет следующим условиям: 1) f(0) = 0; 2) f(z) регулярна при |z| < 1; 3) существует константа h такая, что

$$|\Re f(z)| < h \tag{76,1}$$

при |z| < 1.

Полагая f(z) = w, применим преобразование (52,1)

$$w = \frac{2h}{\pi i} \ln \frac{1 + i\omega}{1 - i\omega}. \tag{76.2}$$

Это соотношение определяет  $\omega$  как функцию z, удовлетворяющую условиям леммы Schwarz'а. Отсюда и из соотношения (52,3) следует

$$|\Im f(z)| \le \frac{2h}{\pi} \ln \frac{1+r}{1-r}. \tag{76,3}$$

77. Поверхности Riemann'a с алгебраической и логарифмической точками ветвления. Функции  $\varphi_n(z)$  и  $\psi(z)$ , посредством которых в § 56 и 57 единичный круг отображался на кругообразные области, имеющие алгебраическую или логарифмическую точку ветвления, удовлетворяют всем условиям леммы Schwarz'a; поэтому удовлетворяются неравенства

$$|\varphi_n(z)| < |z|, \quad |\psi(z)| < |z|, \quad (77,1)$$

$$| \varphi'_n(0) | < 1, \quad | \psi'(0) | < 1,$$
 (77,2)

Неравенства (77,2) легко доказать прямым путем; в § 59 было показано, что при n>2,  $|\psi'(0)|<|\varphi'_n(0)|<|\varphi'_n(0)|$ . Но по (56,3)

$$\varphi_{2}'(0) = \frac{2\sqrt{h}}{1+h} < 1.$$

78. Еще одно свойство функции, введенной в § 57

$$\psi(u) = \frac{h - e^{\frac{1+u}{1-u}\ln h}}{\frac{1+u}{1-u}\ln h} \qquad (h < 1), \tag{78,1}$$

может быть получено следующим образом. Рассмотрение преобразования Möbius'a

$$\frac{1+u}{1-u}\ln h$$

показывает, что при |u| < r < 1

$$\frac{1+r}{1-r}\ln h < \Re\left(\frac{1+u}{1-u}\ln h\right) < \frac{1-r}{1+r}\ln h < 0, \tag{78,2}$$

и потому

$$\begin{vmatrix} \frac{1+u}{1-u} \ln h \\ e \end{vmatrix} > e = \rho.$$
 (78,3)

Отсюда и из (78,1) следует, что значения, принимаемые функцией  $\psi(u)$  при |u| < r, лежат вне некоторого неевклидова круга с неевклидовым центром h; вследствие этого, вспоминая, что  $\rho < 1$ , немедленно получаем неравенство

$$|\psi(u)-h| > \frac{h+\rho}{1+h\rho}-h > (1-h)\rho,$$

r, e. при |u| < r

$$|\psi(u) - h| > (1 - h)e^{\frac{1 + r}{1 - r} \ln h}$$
 (78,4)

79. Рассмотрим теперь функцию w = f(z), обладающую тремя свойствами 1), 2), 3) § 67, и предположим, что существует действительное число h (0 < h < 1) такое, что уравнение f(z) = h не имеет решений в круге |z| < 1.

При этих предположениях легко показать, что функция  $u = \varphi(z)$ , удовлетворяющая уравнению

$$\psi(u) = f(z) \tag{79.1}$$

[где  $\psi(u)$  — функция, определенная равенством (78,1)] и обращающаяся в нуль при z=0, обладает свойствами 1), 2), 3) § 67. Поэтому при |z| < r |u| < r сравнение (78,4) и (79,1) приводит к теореме:

Теорема 9: Если в круге |z| < 1 функция f(z) регулярна, |f(z)| < 1, f(0 = 0 и, наконец,  $f(z) \neq h$  (0 < h < 1), то во всяком круге |z| < r < 1

$$|f(z)-h| > (1-h)e^{\frac{1+r}{1-r}\ln h}$$
 (79,2)

80. Отображения однолистных областей. Пусть функция

$$w = f(z), \tag{80,1}$$

отображает однолистную область T, рассмотренную в § 65, на внутреннюю область единичного круга |z| < 1, и предположим, что f(0) = 0.

Заменим в (65,1) z на  $-\omega$  и обозначим (1  $+\sqrt{2}$ ) $^{-2}$  через h; тогда § 65 и 66 показывают, что функция

$$\omega = \varphi(z), \tag{80,2}$$

полученная решением уравнения

$$w = \frac{-4h\omega}{(h-\omega)^2} = f(z),$$

$$h = (1+\sqrt{2})^{-2},$$
(80,3)

реализует конформное отображение круга на область T', рассмотренную в конце § 66, лежащую внутри единичного круга  $|\omega| < 1$  и не содержащую точки  $\omega = h$ . Так как  $\varphi(0) = 0$ , из леммы Schwarz'a следует, что при  $|z| \le r$ ,  $|\omega| < r$ , и из теоремы § 79 вытекает

$$|\omega - h| > (1 - h)e^{\frac{1+r}{1-r}\ln h}$$
 (80,4)

Но по второму из равенств (80,3)

$$1-h=2\sqrt{h}$$

и, следовательно, из первого равенства (80,3), принимая во внимание неравенства  $|\omega| \leqslant r$  и (80,4), при  $|z| \leqslant r$ 

$$|f(z)| < re^{-2\frac{1+r}{1-r}\ln h},$$
 (80,5)

Заметим, что  $1+\sqrt{2}=2,41\ldots <2,7\ldots < e$ , и поэтому

 $-2 \ln h = 4 \ln (1 + \sqrt{2}) < 4;$ 

мы видим, что (80,5) заключает в себе неравенство

$$|f(z)| < re^{4\frac{1+r}{1-r}}$$
 (80,6)

Этим доказано, что область, соответствующая при конформном отображении кругу  $|z| \le r < 1$ , ограничена и расположена

внутри фиксированного круга  $|w| < re^{\frac{1-r}{r}}$ 

С другой стороны, облесть T, по предположению (см. § 65), содержит круг |w| < 1, и поэтому применение леммы Schwarz'а к функции  $z = \psi(w)$ , обратной для f(z), показывает, что область, соответствующая кругу  $|z| \le r$ , покрывает круг  $|w| \le r$ . Если совершим теперь произвольное растяжение области T, то придем к следующей общей теореме.

Теорема 10: Пусть T однолистная область w-плоскости, содержащая точку w=0 и не содержащая бесконечно удаленной точки, и пусть а расстояние от точки w=0 до границы области, а f(z) функция, отображающая область T конформно на круг |z| < 1 и переводящая точку w=0 в z=0. Тогда во всякой точке z единичного круга |z| < 1 функция f(z) удовлетворяет неравенству

$$a \le \frac{|f(z)|}{|z|} \le ae^{4\frac{1+|z|}{1-|z|}}$$
 (80,7)

Полученная формула может быть использована для отыскания пределов для разностного отношения

$$\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}.$$

По (80,7), модуль функции f(ru)/are не превосходит единицы в круге |u| < 1. Отсюда по теореме 5 § 71 внутри круга |u| < r, т. е. при  $|z| < r^2$ 

$$\left| \begin{array}{c} \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| = \left| \frac{f(ru_1) - f(ru_2)}{r(u_1 - u_2)} \right| \le \frac{ae^{-4} \frac{1 + r}{1 - r}}{1 - r^2},$$

$$|z_1| < r^2, \quad |z_2| < r^2,$$

- 81. Устремляя в равенстве (80,7) |z| к нулю, мы видим, что функция f(z), рассмотренная в § 80, удовлетворяет неравенствам  $a \le |f'(0)| \le ae^4$ . Из леммы Schwarz'а следует, что a есть точная нижняя граница для |f'(0)|; мы определим теперь точную верхнюю границу этой величины, используя весьма остроумный метод E. Schmidt'а. Этот метод излагается здесь впервые (15). Доказательство основывается на следующих рассмотрениях:
- а) Предположим, что функция f(z) не постоянна и регулярна внутри и на границе односвязной области D, ограниченной аналитической кривой  $\gamma$ . Если f(z)=u+iv, где u, v действительны, то

$$\int_{\gamma} u \, dv > 0. \tag{81,1}$$

В самом деле, применяя теорему Green'a и основываясь на уравнениях Cauchy-Riemann'a, получаем:

$$\int_{\mathcal{I}} u \ dv = \int_{\mathcal{D}} \int (u_{x}^{2} + u_{y}^{2}) \ dx \ dy.$$

b) Неравенство (81,1) может быть обобщено на случай многосвязных областей, если функция f(z) однозначна внутри области. Пусть  $\gamma'$  и  $\gamma''$  — две замкнутые кривые, окружающие начало координат z=0, первая из которых лежит внутри второй. Функция  $\ln z$  регулярна, но не однозначна в кольцеобразной области, заключенной между кривыми  $\gamma'$  и  $\gamma''$ . Однако, если положим  $z=\rho e^{i\psi}$  и  $\ln z=\ln \rho+i\psi$ , то  $\ln \rho$  и  $d\psi$  однозначны в этой области, и потому

$$\int_{\gamma''} \ln \rho \, d\psi \gg \int_{\gamma'} \ln \rho \, d\psi. \tag{81,2}$$

с) Если кривые  $\gamma'$  и  $\gamma''$  таковы, что преобразование  $z'' = \frac{1}{z'}$  отображает  $\gamma'$  и  $\gamma''$ , легко убедиться, что

$$\int_{\gamma''} \ln \rho \, d\psi + \int_{\gamma'} \ln \rho \, d\psi = 0. \tag{81,3}$$

Из (81,2) и (81,3) следует, что в этом частном случае

$$\int_{\gamma'} \ln \rho \, d\psi \leqslant 0. \tag{81,4}$$

d) Пусть  $F(z)=z\varphi(z)$ , а  $\varphi(z)$  регулярна и отлична от нуля всюду в замкнутом круге  $|z|\leqslant 1$ . Положим

$$F(e^{i\theta}) = \rho(\theta)e^{i\psi(\theta)}. \tag{81,5}$$

Из сделанных предположений следует, что  $\ln \varphi(z)$  регулярен при  $|z| \le 1$ , и при |z| = 1,  $\ln \varphi(e^{i\theta}) = \ln(F(e^{i\theta})e^{-i\theta}) = \ln \rho + i(\psi - \theta)$ . Из (81,1)

$$\int_{a} \ln \rho \, d(\psi - \theta) \geqslant 0, \tag{81,6}$$

где  $\varkappa$  — круг |z|=1.

С другой стороны, по известной теореме о среднем значении

$$\ln |\varphi(0)| = \Re \ln \varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \ln \rho \, d\vartheta.$$
 (81,7)

Сравнивая (81,6) и (81,7) и помня, что  $\varphi(0) = F'(0)$ , получаем

$$\ln |F'(0)| \le \frac{1}{2\pi} \int \ln \rho \, d\psi.$$
 (81,8)

82. Пусть f(z) функция, рассмотренная в конце § 80, и r < 1. Положим

$$g(z) = \frac{1}{a} f(rz) \tag{82,1}$$

И

$$F(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - g(z)}}{1 + \sqrt{1 - g(z)}} = \frac{g(z)}{\{1 + \sqrt{1 - g(z)}\}^2}.$$
 (82,2)

Из (66,3) следует, что F(z) отображает  $|z| \le 1$  конформно на однолистную область  $T_2^*$ , лежащую внутри области  $T_2$  § 66; поэтому  $\frac{F(z)}{z}$  не обращается в нуль в единичном круге, и

$$F\left(e^{i\vartheta}\right) = \rho e^{i\psi}$$

удовлетворяет неравенству (81,8). По (82,2) и (81,1)

$$F'(0) = \frac{g'(0)}{4} = \frac{r}{4a}f'(0).$$

Отсюда

$$\ln \left| \frac{rf''(0)}{4a} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{x} \ln \rho \, \psi'(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{y'} \ln \rho \, d\psi. \tag{82,3}$$

Обращаясь к последней части § 66, мы убедимся, что  $\gamma'$  удовлетворяет всем условиям, наложенным на нее в пунктах (b) и (c) § 81, и, следовательно, выполняется (81,4). Отсюда и из (82,3) вытекает, что  $|f'(0)| \leq \frac{4a}{r}$ , и так как неравенство выполняется для любого r < 1,

$$|f'(0)| \le 4a.$$
 (82,4)

Полученная верхняя граница не может быть понижена, так как функция

$$w = f(z) = a \frac{1 - \sqrt{1 - z}}{1 + \sqrt{1 - z}}$$

отображает круг |z| < 1 на однолистную область, граница которой отстоит на расстоянии a от w = 0.

83. Отображение друг на друга областей, содержащих заданные круги. Пусть  $R_w$  и  $R_z$  две односвязные области, лежащие внутри кругов |w| < 1 и |z| < 1 и покрывающие круги |w| < h < 1 и |z| < h. Предположим, что существует функция w(z), отображающая конформно область  $R_z$  на  $R_w$  и переводящая точку z=0 в точку w=0, и направления, проходящие через z=0 в параллельные направления в точке w=0, т. е. w(0)=0, а w'(0) положительно; такая функция, очевидно, единственна. Мы покажем, что при 0 < r < 1, в круге  $|z| \le hr$ 

$$|w(z)-z| \le m(h, r),$$
 (83,1)

причем функция m(h, r) не зависит от вида частей  $R_*$  и  $R_w$ , лежащих вне кругов |z| < h и |w| < h, и

$$\lim_{h \to 1} m(h, r) = 0. \tag{83,2}$$

Прежде всего по лемме Schwarz'a во всех точках круга |z| < h

$$\left|\frac{w(z)}{z}\right| \leqslant \frac{1}{h};$$

но это неравенство удовлетворяется также и для всех прочих точек области  $R_z$ , так как для них  $|w| \leqslant 1$  и  $|z| \gg h$ . Перестав-

ляя области  $R_s$  и  $R_w$ , мы убеждаемся (ввиду того, что соответствие взаимно однозначное), что во всех точках w области  $R_w$ ,  $\left|\frac{z}{w}\right| \leqslant \frac{1}{h}$ . Таким образом

$$h \leqslant \left| \frac{w(z)}{z} \right| \leqslant \frac{1}{h} \tag{83,3}$$

во всех точках области  $R_s$ . Но, если |z| < hr,

$$|w-z| = \left|\frac{w}{z} - 1\right| |z| \leqslant hr \left|\frac{w}{z} - 1\right|. \tag{83.4}$$

Чтобы полученное выражение ограничить сверху, положим

$$z = ht, \quad \frac{w(z)}{z} = F(t), \quad \frac{F(t)}{F(0)} = \varphi(t);$$
 (83,5)

тогда из (83,3)

$$h \leq |F(0)| \leq \frac{1}{h}, \quad h^{2} \leq |\varphi(t)| \leq \frac{1}{h^{2}},$$

$$|F(0) - 1| \leq \frac{1 - h}{h},$$
(83,6)

последнее из этих неравенств имеет место ввиду того, что F(0) = w'(0) положительна. При этих обозначениях

$$\left| \frac{w}{z} - 1 \right| = |F(t) - 1| \le |F(t) - F(0)| + |F(0) - 1|,$$

и из (83,6) следует

$$\left| \frac{w}{z} - 1 \right| \le |\varphi(t) - 1| \frac{1}{h} + \frac{1 - h}{h}.$$
 (83,7)

84. Если a некоторое комплексное число, изображающееся точкой P, число |a-1|, равное длине отрезка UP, не превосходит длины UMP, фиг. 22, где MP— дуга круга, описанного из точки O.

Мы приходим, таким образом, к неравенству

$$|a-1| \le |a|-1| + |a| |\Im \ln a|.$$
 (84,1)

85. Из неравенства (84,1)

$$|\varphi(t) - 1| \le ||\varphi(t)| - 1| + |\varphi(t)| |\Im \ln \varphi(t)|;$$
 (85,1)

так как по (83,5)  $\varphi(0) = 1$ , из (83,6) следует, что ветвь аналитической функции  $\psi(t) = \ln \varphi(t)$ , обращающаяся в нуль при t = 0, удовлетворяет неравенству

$$|\Re\psi(t)| \leq -2 \ln h$$
;

отсюда, на основании § 76, при  $|t| \leqslant r$ 

$$|\Im \ln \varphi(t)| \le \frac{-4 \ln h}{\pi} \ln \frac{1+r}{1-r}$$
 (85,2)

Но из (83,6)

$$|\varphi(t)| \le \frac{1}{h^2}, ||\varphi(t)| - 1| \le \frac{1 - h^2}{h^2}.$$
 (85,3)

Из (85,1), (85,2) и (85,3) следует, что

$$|\varphi(t)-1| \leq \frac{1-h^2}{h^2} - \frac{4 \ln h}{\pi h^2} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

Наконец, применяя (83,4) и (83,7), получаем

$$m(r, h) = \frac{(1 - h^{3})r}{h^{2}} - \frac{4r \ln h}{\pi h^{2}} \ln \frac{4r}{1 - r}.$$
 (85,4)

Из полученного выражения легко усмотреть не только, что при фиксированном r

$$\lim_{h\to 1} m(h, r) = 0,$$

но также, что

$$\lim_{h\to 1} m(h, h) = 0.$$

Примечание. Более длинными вычислениями мсжно показать, что функция m(h, r) (85,4) может быть заменена значительно меньшей.

86. Задача. Пользуясь результатами § 82—85, читатель может доказать следующую теорему.

Пусть  $R_u$  и  $S_u$  две односвязные области u-плоскости, содержащие точку u=0, которые отображаются на внутреннюю область единичного круга |z|<1 функциями u=f(z), (f(0)=0, f'(0)>0) и u=g(z), (g(0)=0, g'(0)>0).

Предположим, что функции u=f(z) и u=g(z) отображают круг |z|< h<1 на области, лежащие внутри  $S_u$  и  $R_u$ , т. е. что точки  $R_u$  и  $S_u$ , соответствующие точкам круга |z|< h, принадлежат обеим областям. Тогда требуется доказать, что при  $|z|\leqslant rh< h$  выполняется неравенство  $|f(z)-g(z)|\leqslant \mu\ (h,\ r)$ , где  $\mu$  не зависит от вида областей и  $\lim_{h\to 1}\mu\ (h,\ r)=0$ . Какова  $\lim_{h\to 1}\mu\ (h,\ r)=0$ 

87. Обобщения леммы Schwarz'а. Пусть w = f(z) снова обозначает функцию, регулярную и удовлетворяющую неравенству |f(z)| < 1 во всех точках внутри круга |z| < 1. Одновременно с некоторым неевклидовым кругом C(z), с неевклидовым центром z и неевклидовым радиусом  $\rho(z)$  мы будем рассматривать в w-плоскости неевклидов круг  $\Gamma(z)$  с неевклидовыми центром w = f(z) и радиусом  $\rho(z)$ .

Если через  $A_z$  обозначим множество точек, покрываемое произвольным множеством кругов C(z), и  $A_w$  — множество, покрываемое соответствующими кругами  $\Gamma(z)$  w-плоскости, то из теоремы 3 § 70 следует, что преобразование w=f(z) переводит

точки, принадлежащие к  $A_z$ , в точки  $A_w$ .

Если множество кругов C(z) счетно, мы будем также рассматривать множество  $B_z$ , каждая точка которого принадлежит всем кругам C(z), за исключением конечного числа, и сравнивать это множество с множеством  $B_w$ , полученным таким же образом из соответствующих кругов  $\Gamma(z)$  на w-плоскости. Из упомянутой теоремы следует, что w=f(z) преобразует каждую точку  $B_z$  в точку  $B_w$ .

Можно указать различные приложения предыдущих рассмотрений; из них особенно интересны те, которые проливают свет

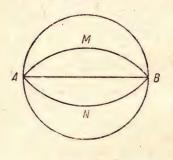
на поведение функции w = f(z) вбяизи круга |z| = 1.

88. Предположим, что центр z круга C(z) с постоянным неевклидовым радиусом описывает диаметр круга |z| < 1, расположенный вдоль действительной оси. В этом случае множество  $A_z$ , состоящее из всех точек, покрытых кругами  $C_z$ , есть область, ограниченная двумя дугами кругов, симметричными относительно действительной оси (см. § 48).

Предположим, что при |z| < 1 функция f(z) регулярна, удовлетворяет неравенству |f(z)| < 1 и принимает действительные значения при действительных z; тогда неевклидовы центры кругов  $\Gamma(z)$ , соответствующих на плоскости w кругам C(z), будут также расположены на действительной оси, и, так как радиус  $\Gamma(z)$  совпадает с радиусом кругов C(z), круги  $\Gamma(z)$  опишут в

плоскости w область, конгруэнтную  $A_z$ . Поэтому мы получаем следующую теорему:

Теорема 11: Пусть при |z| < 1 функция f(z) регулярна, удовлетворяет неравенству |f(z)| < 1 и принимает действительные значения вдоль действительной оси. Обозначим через



Фиг. 23.

A и B точки — 1 и + 1, через AMB дугу круга, расположенную внутри |z| < 1, и через ANB дугу, симметричную с ней относительно действительной оси. Если z принимает значение, лежащее внутри области AMBN, значение f(z) попадает также внутрь этой области.

89. Теорема Julia. Метод § 87 без затруднения приводит к одной важной теореме, данной G. Julia (16). Заметим, прежде всего, что неевкли-

дово расстояние между двумя действительными точками x, h (x < h) круга |z| < 1 совпадает с неевклидовым расстоянием между действительными точками y, k круга |w| < 1, если ангармоническое отношение точек (-1, x, h, +1) совпадает с ангармоническим отношением точек (-1, y, k, +1), т. е. если

$$\frac{(1-x)(1+h)}{(1+x)(1-h)} = \frac{(1-y)(1+k)}{(1+y)(1-k)}$$
(89,1)

или, полагая 1 - h = u, 1 - k = v, если

$$\frac{1-y}{1+y} = \frac{v(2-u)}{u(2-v)} \frac{1-x}{1+x}.$$
 (89,2)

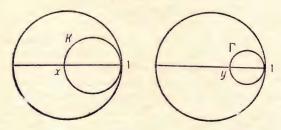
Рассмотрим теперь две последовательности положительных чисел  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  и  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ , . . ., удовлетворяющие условиям:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} v_n = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{v_n}{u_n} = \alpha, \tag{89,3}$$

где а конечно. Обозначим через  $K_n'$  круг, проходящий через точку x, имею ций неевклидов центр в точке  $h_n=1-u_n$ , и через  $\Gamma_n'$  круг того же неевклидова радиуса с неевклидовым центром в точке  $k_n=1-v_n$ . Круг  $\Gamma_n'$  пересекает действительную ось w-плоскости в точке  $y_n$ , получающейся заменой в (89,2) u, v, y на  $u_n$ ,  $v_n$ ,  $y_n$ . В соответствии с (89,3) окружности  $K_n'$  сходятся к предельной линии K неевклидовой плоскости

|z| < 1, проходящей через гочки z = 1 и z = x, а окружности  $\Gamma_n' - \kappa$  предельной линии  $\Gamma$ , плоскости |w| < 1, проходящей через точки w = 1 и w = y; здесь у обозначает предел точек  $y_n$  и определяется из уравнения [см. (89,2) и (89,3)]:

$$\frac{1-y}{1+y} = \alpha \frac{1-x}{1+x}.$$
 (89,4)



Фиг. 24.

Если обозначим через r и  $\rho$  евклидовы радиусы кругов K и  $\Gamma$ , то x=1-2r,  $y=1-2\rho$  и из (89,4)

$$\rho = \frac{\alpha r}{1 - r(1 - \alpha)}.\tag{89,5}$$

90. Пусть f(z) аналитическая функция, регулярная в круге |z| < 1, модуль которой не превосходит единицы; предположим, далее, что существует последовательность чисел  $z_1, z_2, z_3, \ldots$  такая, что

$$\lim_{n \to \infty} z_n = 1, \quad \lim_{n \to \infty} f(z_n) = 1 \tag{90,1}$$

И

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|} = \alpha, \tag{90,2}$$

где а конечно. Из (72,3) следует, что

$$\alpha \gg \frac{1 - |f(0)|}{1 + |f(0)|} > 0.$$
 (90,3)

Положим теперь  $u_n=1-|z_n|$ ,  $v_n=1-|f(z_n)|$  и построим круги  $K_n'$  и  $\Gamma_n'$  (§ 89). Подразумевая опять под K и  $\Gamma$  предельные линии, к которым сходятся  $K_n'$  и  $\Gamma_n'$ , обозначим через  $K_n$  и  $\Gamma_n$  неевклидовы круги, равные  $K_n'$  и  $\Gamma_n'$ , но имеющие центры  $z_n$  и  $f(z_n)$  вместо  $|z_n|$  и  $|f(z_n)|$ .  $K_n$  получается из  $K_n'$  поворо-

том относительно начала; так как по (90,1) угол поворота стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности, круги  $K_n$  сходятся к той же линии K, что и круги  $K_n'$ . Подобным же образом  $\Gamma_n$  сходятся к  $\Gamma$ . В соответствии с § 87, если z находится внутри K, точка w = f(z) не может лежать вне круга  $\Gamma$ ; рассуждениями, аналогичными проведенным в § 67, можно показать, что f(z) лежит внутри  $\Gamma$ .

Полученный результат составляет теорему Julia 1 (16).

91. Результат § 90 может быть дополнен следующим замечанием: если некоторая точка  $z_1$  границы K переходит в точку  $f(z_1)$  границы Г, функция f(z) дробно-линейна. В самом деле, по § 48, две предельные линии, касающиеся круга |z| = 1 в точке z=1, представляют собой параллельные кривые, в смысле неевклидовой геометрии; следовательно, преобразование (89,4), дающее неевклидово движение, переводит две такие предельные линии, проходящие через точки  $x_1$  и  $x_2$   $(x_1 < x_2)$ , в две предельные линии, проходящие через  $y_1$  и  $y_2$  и отстоящие друг от друга на том же расстоянии  $\delta$ . Пусть  $z_1$  точка предельной линии, проходящей через  $x_1$ , такая, что соответствующая ей точка  $w_1 = f(z_1)$  лежит на предельной линии, проходящей через  $y_1$ ; возьмем на предельной линии, проходящей через  $x_2$ , ту из ее точек  $z_2$ , для которой  $D(z_1, z_2) = \delta$ ; тогда на основании теоремы Julia точка  $w_2 = f(z_2)$  не может лежать вне предельной линии, проходящей через  $y_2$ , и поэтому  $D(w_1, w_2) \gg \delta$ . Но по теореме 3 § 70  $D(w_1, w_2) \le \delta$ , следовательно,  $D(w_1, w_2) = \delta$ , а это не может выполняться ни для одной пары точек, если f(z)не представляет собой неевклидова движения. Так как f(1) = 1, f(z) должна иметь вид:

$$f(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \cdot \frac{1 - \overline{z_0}}{1 - z_0}.$$
 (91,1)

92. Теорема Julia допускает следующую геометрическую интерпретацию: на фиг. 25 видно, что

$$\frac{AP}{PB} = \frac{Ax}{xE} = \frac{1-x}{1+x}$$

И

$$\frac{A_1P_1}{P_1B_1}\leqslant \frac{1-y}{1+y}.$$

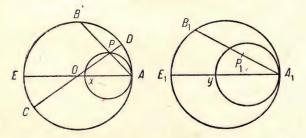
 $<sup>^1</sup>$  В своем доказательстве Julia требует, чтобы f(z) была регулярной в точке z=1. Замечательно, что теорема может быть доказана без этого требования.

Если P и  $P_1$  обозначают точки z и f(z), теорема Julia вместе с (89,4) приводят к неравенству

$$\frac{A_1P_1}{P_1B_1} \leqslant \alpha \frac{AP}{PB}. \tag{92,1}$$

Но на основании теорем элементарной геометрии

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AP^2}{AP \cdot PB} = \frac{AP^2}{CP \cdot PD} = \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2},$$
 (92,2)



Фиг. 25.

и поэтому теорема Julia эквивалентна следующему неравенству:

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \le \alpha \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}.$$
 (92,3)

93. Из теоремы Julia получается ряд интересных следствий. Если обозначим, так же как в (89,5), через r и  $\rho$  евклидовы радиусы кругов K и  $\Gamma$ , то действительной точке

$$x = 1 - 2r (93,1)$$

соответствует точка f(x), лежащая внутри или на границе  $\Gamma$  и, следовательно, удовлетворяющая неравенству

$$1 - |f(x)| \le |1 - f(x)| \le 2\rho$$
.

Это дает, принимая во внимание (89,5) и (93,1),

$$\frac{1-|f(x)|}{1-x} \leqslant \frac{|1-f(x)|}{1-x} \leqslant \frac{\alpha}{1-r(1-\alpha)},$$

откуда непосредственно

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} \le \lim_{x \to 1} \frac{|1 - f(x)|}{1 - x} \le \alpha;$$
(93,2)

$$\overline{\lim_{x \to 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x}} \leqslant \overline{\lim_{x \to 1} \frac{|1 - f(x)|}{1 - x}} \leqslant \alpha, \tag{93,3}$$

где  $\alpha$ —число, определенное равенством (90,2); наиболее предпочтительный выбор  $\alpha$  достигается выбором последовательности  $z_n$ , удовлетворяющей (90,1) и (90,2) и такой, что

$$\alpha = \lim_{x \to 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x}.$$

При таком выборе уравнения (93,2) и (93,3) немедленно доказывают существование пределов

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{|1 - f(x)|}{1 - x} = \alpha; \tag{93.4}$$

так как по (90,3)  $\alpha > 0$ , последнее уравнение показывает, что

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - |f(x)|}{|1 - f(x)|} = 1. \tag{93.5}$$

Если положим

$$1 - f(x) = \lambda e^{i\theta}, \tag{93,6}$$

где  $\lambda > 0$  и  $\theta$  действительно, то

$$\frac{1 - |f(x)|}{|1 - f(x)|} = \frac{2\cos\theta - \lambda}{1 + \sqrt{1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2}},$$
 (93,7)

но, если x стремится к единице,  $\lambda$  стремится к нулю, и, следовательно, по (93,5) и (93,7) сов  $\theta$  (а также  $e^{i\theta}$ ) стремится к единице. Отсюда на основании (93,5) и (93,6)

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - f(x)}{1 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{|1 - f(x)| e^{i\theta}}{1 - x} = \alpha. \tag{93.8}$$

Полученные результаты мы резюмируем в виде следующей теоремы.

Теорема 12: Пусть f(z) регулярна и удовлетворяет неравенству |f(z)| < 1 в круге |z| < 1. Предположим, что внутри единичного круга существует последовательность точек  $z_1, z_2, \ldots$  такая, что  $\lim z_n = 1$ ,  $\lim f(z_n) = 1$  и

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|} \tag{93.9}$$

жонечен; тогда выполняются следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{|1 - f(x)|}{1 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{1 - f(x)}{1 - x} = \alpha, \quad (93, 10)$$

где а — действительная и положительная константа, а х стремится к пределу, оставаясь на действительной оси.

## Глава V

## ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

94. Непрерывная сходимость. Пусть A— произвольное множество точек комплексной плоскости и  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ ,  $f_3(z)$ , ...,  $f_n(z)$ , ... последовательность функций определенных и конечных на множестве A; мы введем следующее определение: последовательность  $f_n(z)$  называется непрерывно сходящейся в предельной точке  $z_0$  множества A, если для всякой последовательности точек  $z_n$ , принадлежащих к множеству A и сходящихся к точке  $z_0$ , существует предел  $\{x_n\}$ 

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z_n) = f(z_0). \tag{94.1}$$

Легко показать, что в этом случае предел  $f(z_0)$  не зависит от специального выбора последовательности  $z_n$  и что всякая подпоследовательность  $f_{n_1}(z), f_{n_2}(z), \ldots$  данной последовательности, в точке  $z_0$  сходится непрерывно к  $f(z_0)$ , т. é.

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(z_k) = f(z_0) \quad (n_1 < n_2 < \dots). \tag{94.2}$$

Из определения непрерывной сходимости непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 1: Если 1) последовательность функций  $w = f_n(z)$ , определенных на множестве A, непрерывно сходится в точке  $z_0$   $\kappa$  конечному пределу  $w_0 = f(z_0)$ , 2) значения, принимаемые всеми функциями  $w = f_n(z)$  на множестве A, принадлежат  $\kappa$  множеству B точек w-плоскости, 3) последовательность функций  $\phi_n(w)$ , определенных на множестве B, непрерывно сходится в точке  $w_0$ , то последовательность

$$F_n(z) = \varphi_n \left\{ f_n(z) \right\}$$

сходится непрерывно в точке го.

95. Предельное колебание. Пусть  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ ,... последовательность функций, определенных в области R и равномерно ограниченных в окрестности каждой точки этой области. Обозначим через  $z_0$  некоторую точку, принадлежащую R, а через  $C^{(1)}$ ,  $C^{(2)}$ ,... последовательность кругов, описанных из центра  $z_0$ ,

внутри области R, радиусы которых монотонно убывают и стремятся к нулю.

Пусть далее  $O_n^{(h)}$  обозначает колебание  $f_n(z)$  в круге  $C^{(h)}$ ,

$$O_n^{(h)} = \sup |f_n(z') - f_n(z'')|,$$
 (95,1)

где z', z'' — две произвольные точки области  $C^{(k)}$ . Если положим

$$\omega^{(h)} = \overline{\lim}_{n \to \infty} O_n^{(h)}, \tag{95,2}$$

то, так как  $C^{(k+1)} \subset C^{(k)}$ ,  $\omega^{(k+1)} \leqslant \omega^k$  и, следовательно, существует предел

$$\omega(z_0) = \lim_{k \to \infty} \omega^{(k)}.$$

Легко убедиться, что этот предел зависит только от последовательности  $f_n(z)$  и точки  $z_0$ , но не зависит от выбора последовательности кругов  $C^{(k)}$ .

Число  $\omega(z_0)$  называется пределоным колебанием последовательности  $f_n(z)$  в точке  $z_0$ .

96. Мы докажем теперь следующие теоремы:

Теорема 2: Предельное колебание  $\omega(z_0)$  последовательности  $f_n(z)$  в точке  $z_0$  не меньше предельного колебания  $\sigma(z_0)$  произвольной ее подпоследовательности  $f_{n_b}(z)$ , т. е.

$$\sigma(z_0) \leqslant \omega(z_0). \tag{96,1}$$

В самом деле, по (95,2) в каждом круге  $C^{(k)}$ 

$$\sigma^{(k)} < \omega^{(k)}$$
.

Теорема 3: Если в точке  $z_0$  предельное колебание  $\omega(z_0) > 0$ , последовательность  $f_n(\bar{z})$  не может сходиться непрерывно в точке  $z_0$ .

В самом деле, по предположению, каково бы ни было целое число k, колебание бесконечного множества функций последовательности в круге  $C^{(k)}$  превышает  $\omega^{(k)} = \frac{1}{2} \omega (z_0)$ , т. е. превышает  $\frac{1}{2} \omega (z_0)$  [так как  $\omega^{(k)} \gg \omega (z_0)$ ]. Но тогда существуют две последовательности точек  $z_1'$ ,  $z_2'$ , ... и  $z_1''$ ,  $z_2''$ , ... и возрастающая

последовательность целых чисел  $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots$  такие, что выполняются равенства

$$\lim_{k \to \infty} z'_{k} = z_{0}, \quad \lim_{k \to \infty} z''_{k} = z_{0}, \\ |f_{n_{k}}(z'_{k}) - f_{n_{k}}(z''_{k})| > \frac{1}{2} \omega(z_{0}).$$
(96,2)

Огсюда следует, что либо хотя бы одна из двух последовательностей

$$w'_{k} = f_{n_{k}}(z'_{k}), \quad w''_{k} = f_{n_{k}}(z''_{k})$$
 (96,3)

расходится, либо обе последовательности сходятся, но к различным пределам. Каждая из этих возможностей несовместима с непрерывной сходимостью (§ 94).

Теорема 4: Если  $\omega(z_0)=0$  и каждая окрестность  $z_0$  содержит точку, в которой последовательность  $f_n(z)$  сходится, последовательность  $f_n(z)$  сходится непрерывно в точке  $z_0$ . В частности, последовательность сходится непрерывно в точке  $z_0$ , если  $\omega(z_0)=0$ ,  $\lim_{n\to\infty} f_n(z_0)$  существует и конечен.

Пусть  $z_1$ ,  $z_2$ , ... произвольная последовательность точек области R, сходящаяся к  $z_0$ . Мы покажем, что если предположения теоремы 4 выполняются, последовательность

$$w_n = f_n(z_n) \tag{96.4}$$

сходится.

Обозначив через  $\varepsilon$  произвольное положительное число, мы можем подобрать круг  $C^{(k)}$  такой, что

$$\omega^{(k)} < \frac{1}{6} \varepsilon, \tag{96,5}$$

так как  $\lim_{k\to\infty}\omega^{(k)}=0$ . По предположению круг  $C^{(k)}$  содержит точку  $\zeta$ , в которой последовательность  $f_n(z)$  сходится; но тогда существует число  $N_1$  такое, что при  $n>N_1$  и  $m>N_1$ 

$$|f_n(\zeta) - f_m(\zeta)| < \frac{1}{3} \varepsilon. \tag{96,6}$$

На основании (95,2) и (96,5) существует число  $N_2$  такое, что при  $n>N_2$  колебание  $O_n^{(k)}<\frac{1}{3}$  є; предположим, наконец, что при  $n>N_3$  точки  $z_n$  лежат в круге  $C^{(k)}$ . Если N обозначает

наибольшее из чисел  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  и n > N, m > N, то одновременно с неравенством (96,6) выполняются неравенства

$$|f_n(z_n) - f_n(\zeta)| < \frac{1}{3} \varepsilon, \quad |f_m(z_m) - f_m(\zeta)| < \frac{1}{3} \varepsilon.$$
 (96,7)

Эти неравенства вместе с (96,6) и (96,4) дают

$$|w_n - w_m| < \varepsilon \quad (n, m > N). \tag{96.8}$$

Применяя критерий Cauchy, убеждаемся, что последовательность  $w_n$  сходится, и, следовательно, теорема 4 доказана.

Теорема 5: Обозначим через B множество точек z, в которых последовательность  $f_n(z)$  сходится  $\kappa$  f(z). Каждая предельная точка  $z_0$  множества B, в которой  $\omega(z_0)=0$ , принадлежит  $\kappa$  B и функция f(z) непрерывна в точке  $z_0$ .

Из теоремы 4 следует не только, что функции  $f_n(z)$  сходятся в точке  $z_0$ , и, следовательно,  $z_0$  принадлежит к B, но что сходимость в точке  $z_0$  непрерывна. Рассмотрим последовательность точек  $B: z_1, z_2, \ldots$ , сходящуюся к  $z_0$ ; чтобы установить непрерывность f(z) в точке  $z_0$ , достаточно показать, что

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(z_0); \tag{96,9}$$

так как последовательность  $f_n(z)$  сходится во всех точках  $z_h$ , можно найти возрастающую последовательность целых чисел $n_1, n_2, \ldots$  такую, что

$$|f_{n_k}(z_k) - f(z_k)| < \frac{1}{k}.$$
 (96,10)

Искомое соотношение (96,9), вытекает из (96,10), принимая во внимание, что при непрерывной сходимости последовательности в точке  $z_0$ 

$$\lim_{h \to \infty} f_{n_h}(z_h) = f(z_0). \tag{96,11}$$

97. Нормальные семейства ограниченных функций (17) (18). Рассмотрим семейство функций  $\{f(z)\}$ , определенных в области R и равномерно ограниченных в некоторой окрестности каждой точки  $z_0$  этой области. Для такого семейства функций в каждой точке  $z_0$  можно определить число  $\omega z_0$ ), которое мы будем называть предельным колебанием семейства. Рассмотрим опять последовательность кругов  $C^{(k)}$ , определенных в  $\S$  95, и обозначим через  $\omega^{(k)}$  верхний предел колебаний всех

функций семейства в круге  $C^{(k)}$ ; число  $\omega^{(k)}$  обладает следующими свойствами: если  $p>\omega^{(k)}$ , то может существовать лишь конечное число функций семейства  $\{f(z)\}$ , колебание которых в  $C^{(k)}$  превышает p, и, если  $q<\omega^{(k)}$ , существует бесконечное множество функций этого семейства, имеющих колебание, превышающее q. Предельное колебание мы определим следующим равенством

$$\omega(z_0) = \lim_{h \to \infty} \omega^{(h)}. \tag{97.1}$$

Следующая теорема очевидна.

Теорема 6: Предельное колебание в точке  $z_0$  всякой последовательности функций  $f_1(z), f_2(z), \ldots$ , принадлежащих к  $\{f(z)\}$ , не превышает предельного колебания  $\omega(z_0)$  семейства  $\{f(z)\}$ 

в точке го.

98. Введем теперь следующее определение: семейство  $\{f(z)\}$  функций, определенных в области R и равномерно ограниченных в каждой точке, называется нормальным в R, если предельное колебание  $\omega(z_0)$  обращается в нуль в каждой точке области R.

Мы имеем:

Теорему 7: Всякая последовательность функций  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ , ..., принадлежащих к нормальному в R семейству  $\{f(z)\}$ , содержит подпоследовательность  $f_{n_1}(z)$ ,  $f_{n_2}(z)$ , ..., непрерывно сходящуюся в каждой точке R (19).

Рассмотрим счетное множество точек  $z_1, z_3, \ldots$ , всюду плотное в области R. Из данной последовательности можно извлечь диагональным процессом (Cantor и Hilbert) подпоследова-

тельность, для которой

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(z_p) \tag{98,1}$$

существует в каждой точке счетного множества [6]. Подпоследовательность  $f_{n_k}(z)$  во всех точках области R удовлетворяет условиям теоремы 4 § 96; это доказывает теорему.

99. Легко убедиться, что два понятия а) непрерывной сходимости последовательности непрерывных функций во всех 
точках замкнутого множества ү и b) равномерной сходимости 
этой последовательности на ү вполне эквивалентны [7] (18). Следующая теорема есть следствие этой эквивалентности, но мы 
докажем ее прямым путем.

Теорема 8: Если последовательность  $f_1(z), f_2(z), \ldots$  сходится непрерывно к f(z) во всех точках замкнутого множе-

ства  $\gamma$  и если  $f(z) \neq 0$  на  $\gamma$ , то существуют два положительные числа m и N такие, что во всех точках множества при n > N

 $|f_n(z)| > m. \tag{99,1}$ 

Если утверждение теоремы не выполняется, можно найти возрастающую последовательность целых чисел  $n_1 < n_2 < \dots$  и последовательность точек  $z_1, z_2, \dots$  множества  $\gamma$  такие, что

$$|f_{n_b}(z_k)| < \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, ...).$$
 (99,2)

Откидывая часть точек  $z_h$  и нумеруя снова оставшиеся точки, мы можем обеспечить существование предела

$$\lim_{k \to \infty} z_k = z_0; \tag{99,3}$$

так как множество  $\gamma$  замкнуто,  $z_0$  принадлежит к  $\gamma$  и поэтому последовательность  $f_1(z), f_2(z), \ldots$  сходится непрерывно в  $z_0$ .

$$f(z_0) = \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(z_k) = 0,$$
 (99,4)

что противоречит предположениям. Это доказывает теорему.

100. Существование решений некоторых задач вариационного исчисления. Теорема Weierstrass'а о том, что непрерывная функция, определенная на замкнутом множестве n-мерного пространства, достигает максимума в некоторой точке этого множества, в известных условиях может быть обобщена на функциональное пространство, элемент которого определяется не заданием чисел, а заданием функции. Предположим например, что дано семейство комплексных функций  $\{f(z)\}$ , определенных в области R. Семейство называется компактным, если каждая последовательность принадлежащих к нему функций  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ , . . . содержит подпоследовательность, сходящуюся в R к функции  $f_0(z)$ , также принадлежащей к семейству  $\{f(z)\}$  (20).

Рассмотрим функционал I(f), ставящий в соответствие каждой функции f(z) семейства  $\{f(z)\}$  некоторое конечное число. Функционал I(f) называется непрерывным, если сходимость в области R последовательности  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ , . . . к функции  $f_0(z)$  семейства  $\{f(z)\}$  влечет за собой  $I(f_n) \to I(f_0)$ . Мы можем теперь до-

казать:

Теорема 9: Если I(f) непрерывный функционал, определенный в компактном семействе  $\{f(z)\}$ , то задачи

$$|I(f)| = \text{maximum} \tag{100,1}$$

имеет решение в семействе  $\{f(z)\}.$ 

Надо показать, что существует по крайней мере одна функция  $f_0(z)$  семейства  $\{f(z)\}$  такая, что все другие функции семейства  $\{f(z)\}$  удовлетворяют неравенству

$$|I(f)| \le |I(f_0)|.$$
 (100,2)

Для этого обозначим через  $\alpha$  конечную (или бесконечную) верхнюю границу чисел |I(f)|, когда f(z) изменяется в семействе  $\{f(z)\}$ ; тогда существует в семействе  $\{f(z)\}$  последовательность функций, для которой выполняется

$$\lim_{n\to\infty} |I(f_n)| = \alpha. \tag{100,3}$$

Так как  $\{f(z)\}$  компактно, из последовательности  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ , . . . можно извлечь подпоследовательность  $f_{n_1}(z)$ ,  $f_{n_2}(z)$ , . . . , сходящуюся к функции  $f_0(z)$  семейства  $\{f(z)\}$ . Из непрерывности I(f) следует

$$|I(f_0)| = \lim_{k \to \infty} |I(f_{n_k})| = \alpha.$$

Это не только доказывает теорему, но также показывает, что а конечно.

101. Нормальные семейства голоморфных функций. Рассмотрим семейство функций  $\{f(z)\}$ , определенных и голоморфных внутри области R. Для таких семейств выполняется следующая теорема:

Теорема 10: Пусть  $\{f(z)\}$  семейство функций, голоморфных внутри области R. Предположим, что функции семейства равномерно ограничены на окружности каждого круга, целиком лежащего внутри R; тогда  $\{f(z)\}$ , так же как и семейство  $\{f'(z)\}$  производных функций данного семейства, нормально в R.

Пусть  $z_0$  — точка R и  $|z-z_0|\leqslant \rho$  — замкнутый круг, целиком лежащий внутри R. Тогда существует число M такое, что неравенство |f(z)| < M выполняется во всех точках окружности  $|z-z_0|=\rho$ , а поэтому и во всех точках круга  $|z-z_0|<\rho$ . На основании теоремы 5 § 71 заключаем, что при всяком r, заключенном между нулем и единицей, для каждой функции

семейства  $\{f(z)\}$  и для любой пары точек (z', z'') круга  $|z-z_0|<
ho r$  выполняется неравенство

$$|f(z') - f(z'')| \le \frac{M|z' - z''|}{\rho(1 - r^2)} < \frac{2Mr}{1 - r^2}.$$
 (101,1)

Отсюда непосредственно следует, что предельное колебание семейства  $\{f(z)\}$  обращается в нуль в точке  $z=z_0$ . По § 98 семейство  $\{f(z)\}$  нормально.

Чтобы доказать, что семейство  $\{f'(z)\}$ , состоящее из производных от функций данного семейства, нормально, мы заметим, что по теореме 4 § 71 функции f'(z) равномерно ограничены

в круге  $|z-z_0| \leq rp$ .

102. Мы докажем теперь, что функция  $f_0(z)$ , предельная для сходящейся последовательности функции семейства  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ , ..., голоморфна в области R. Для этого достаточно показать, что  $f_0(z)$  диференцируема в каждой точке R.

Возьмем замкнутый круг  $|z-z_0| \leqslant \rho$ , лежащий в области R, и рассмотрим последовательность голоморфных функций  $\varphi_n(z)$ ,

определенных равенствами:

$$\varphi_n(z) = \frac{f_n(z) - f_n(z_0)}{z - z_0} \quad (z \neq z_0),$$
 (102,1)

$$\varphi_n(z_0) = f_n'(z_0).$$
 (102,2)

Последовательность функций  $\varphi_n(z)$  равномерно ограничена на окружности  $|z-z_0|=\rho$  и поэтому, на основании результата предыдущего параграфа, нормальна. Очевидно, последовательность  $\varphi_n(z)$  сходится во всякой точке круга, отличной от  $z_0$ , и, следовательно, сходится непрерывно в самой точке  $z_0$  (теорема 4 § 96). Обозначим предельную функцию через  $\varphi(z)$ ; тогда (102,1) и (102,2) дают

$$\varphi(z) = \frac{f_0(z) - f_0(z_0)}{z - z_0} \quad (z \neq z_0), \tag{102,3}$$

$$\varphi(z_0) = \lim_{n \to \infty} f'_n(z_0). \tag{102,4}$$

На основании теоремы 5 § 96  $\varphi(z)$  непрерывна в точке  $z_0$ , и потому предыдущие уравнения показывают, что

$$f'_n(z_0) = \varphi(z_0) = \lim_{n \to \infty} f'_n(z_0),$$
 (102,5)

Теорема 11: Если последовательность голоморфных функций равномерно ограничена в области сходимости последовательности, то предельная функция голоморфна и ее производная есть предел производных от функций последовательности.

Принимая во внимание эту теорему, для краткости мы будем называть сходящуюся последовательность голоморфных функций, ограниченных в вышеуказанном смысле, регулярно сходящейся.

Пусть дана последовательность голоморфных функций, определенных и равномерно ограниченных в каждой точке некоторой области R; последовательность будет регулярно сходящейся во всей области R, если только множество точек ее сходимости имеет хотя бы одну предельную точку внутри R. В самом деле, если данная последовательность не сходится всюду, можно из нее извлечь две подпоследовательности, сходящиеся к двум различным голоморфным функциям f(z) и  $g(z)^{[8]}$ . Но в каждой точке, в которой последовательность сходится, (f(z)-g(z))=0, а нули аналитической функции не могут иметь предельную точку внутри области.

103. Следующая теорема относительно регулярно сходящихся последовательностей голоморфных функций представляет собой частный случай хорошо известной теоремы Hurwitz'a.

Теорема 12: Если в некоторой области R последовательность функций  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ , . . . регулярно сходится  $\kappa$  f(z) и если ни одна из функций  $f_n(z)$  не обращается в нуль в точках R, то либо  $f(z) \equiv 0$ , либо f(z) не обращается в нуль ни в одной точке R.

Предположим, что f(z) не есть тождественный нуль внутри R. Тогда около каждой точки  $z_0$  области R можно провести круг  $|z-z_0| \leqslant \rho$ , лежащий в R, на окружности которого  $f(z) \neq 0$ . По теореме 8 § 99 существует число m>0 такое, что во всех точках окружности  $|z-z_0|=\rho$ 

$$|f_n(z)| > m,$$
 (103,1)

если только n достаточно велико. Но внутри круга  $|z-z_0| \le \rho$ ,  $f_n(z) \ne 0$ , и поэтому при достаточно больших значениях n

$$|f_n(z_0)| \geqslant m; \tag{103,2}$$

отсюда

$$|f(z_0)| = \lim_{n \to \infty} |f_n(z_0)| \geqslant m,$$

и, следовательно,

$$f(z_0) = 0.$$

Вот непосредственное следствие нашей теоремы.

Теорема 13: Пусть последовательность функций  $f_1(z)$ ,  $f_2(z), \ldots$  регулярно сходится к f(z) в некоторой области R. Eсли функция f(z) не обращается в постоянную, каждая окрестность  $N_{z_0}$  всякой точки  $z_0$  области R, начиная c некоторого п, содержит точки г, удовлетворяющие равенству

$$f_n(z_n) = f(z_0).$$

Если бы это было не так, данная последовательность содержала бы бесконечную подпоследовательность  $f_{n_1}(z), f_{n_2}(z), \ldots$ такую, что функции  $(f_{n_k}(z) - f(z_0))$  были бы отличны от нуля в окрестности  $N_{z_a}$ . Так как предельная функция последней последовательности  $(f(z) - f(z_0))$  обращается в нуль в точке  $z_0$ , по теореме 12  $(f(z) - f(z_0))$  есть тождественный нуль; но тогда f(z) постоянна, а это противоречит предположениям.

104. Применение к конформным отображениям. Следующая теорема играет фундаментальную роль в теории конформных

отображений.

Теорема 14: Пусть  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ , . . . регулярно сходящаяся в области R последовательность функций, дающих конформное отображение области R на равномерно ограниченные, однолистные области  $S_1, S_2, \ldots$  Тогда предельная функция f(z) или постоянна, или отображает конформно область R

на некоторую однолистную область S.

Если z и  $z_0$  две различные точки R, по предположению  $f_n(z) \neq f_n(z_0)$ ; поэтому  $\varphi_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$  не обращается в нуль в области  $R - z_0$  с выколотой точкой  $z_0$ . Функции  $\varphi_n(z)$  сходятся непрерывно в области  $R-z_0$  к функции  $\varphi(z)=f(z)-f(z_0)$ . По теореме 12 § 103 функция  $\varphi(z)$  или тождественно равна нулю, и тогда f(z) постоянна, или  $\varphi(z)$  всюду отлична от нуля, и  $f(z) \pm f(z_0)$ .

105. Основная теорема о конформных отображениях (21). Пусть R произвольная ограниченная область z-плоскости, содержащая точку z=0, а также круг и, определенный неравен-

**CTBOM** 

$$|z| < \rho. \tag{105,1}$$

Мы не делаем никаких предположений относительно связности R. Рассмотрим семейство функций  $\{f(z)\}$ , голоморфных в круге (105,1), состоящее из функции  $f(z) \equiv 0$  и всех функций f(z), удовлетворяющих следующим условиям:

a) f(0) = 0;

b) функция f(z) продолжаема по всякому пути  $\gamma$ , лежащему

внутри R, и, следовательно, всюду регулярна;

с) если  $\gamma'$  и  $\gamma''$  два пути, соединяющие начало координат с точками z' и z'', и  $[F(z')]_{\gamma'}$ ,  $[F(z'')]_{\gamma''}$  значения, полученные в точках z' и z'' продолжением f(z) по этим направлениям, то имеет место соотношение:

$$[F(z')]_{\gamma'} \neq [F(z'')]_{\gamma''},$$
 (105,2)

если  $z' \neq z''$  (в частности,  $[F(z)]_{\gamma} \neq 0$ , если только  $z \neq 0$ ); d) при тех же обозначениях

$$|[F(z)]_{\gamma}| < 1.$$
 (105,3)

**106.** Мы докажем, прежде всего, что семейство  $\{f(z)\}$  компактно (§ 100).

Условие d) показывает, что всякая последовательность функций семейства содержит подпоследовательность  $f_1(z), f_2(z), \ldots,$ сходящуюся в круге и к некоторой функции  $f_0(z)$ :

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z) = f_0(z). \tag{106,1}$$

Мы докажем, что  $f_0(z)$  принадлежит к семейству  $\{f(z)\}$ . Очевидно,  $f_0(0)=0$ , а поэтому либо выполнено условие а),

либо  $f(z) \equiv 0$ .

Чтобы установить свойство b), достаточно показать, что если  $\gamma'$  есть путь, соединяющий точку z=0 с z', лежащий внутри R. и если аналитическое продолжение  $f_0(z)$  проводит в каждой точке  $\zeta$  пути  $\gamma'$ , отличной от z', к регулярной функции  $[F_0(\zeta)]_{\gamma}$ , которая может быть получена как предел аналитических продолжений  $[F_n(\zeta)]_{\gamma'}$  функций  $f_n(z)$ , то то же самое имеет место для точки г' и для всех точек некоторой ее окрестности.

В этом легко убедиться, имея в виду, что функции  $[F_n(\zeta)]_{\chi'}$ регулярны в окрестности точки z', сходятся во всех точках некоторого участка кривой у и по условию d) образуют нор-

мальное семейство (§ 102).

Для доказательства свойства с) рассмотрим два пути  $\gamma'$  и  $\gamma''$  с различными конечными точками z' и z''. Пусть  $N_{z'}$  и  $N_{z''}$ не перекрывающиеся окрестности точек 2' и 2".

По теореме 13 § 103 окрестность  $N_{z'}$  содержит точки  $z'_n$ , а  $N_{z'}$  — точки  $z'_n$ , удовлетворяющие равенствам

$$[F_n(z'_n)]_{\gamma'} = [F_0(z')]_{\gamma'}, [F_n(z''_n)]_{\gamma''} = [F_0(z')]_{\gamma''}$$
 (106,2)

при достаточно больших значениях п.

По предположению величины, стоящие в левых частях этих уравнений, не равны между собой, а поэтому

$$[F_0(z')]_{\gamma'} \neq [F_0(z'')]_{\gamma''}.$$

Наконец, очевидно, что  $f_0(z)$  удовлетворяет условию d). 107. Рассмотрим одну из функций f(z) данного семейства и ее аналитическое продолжение  $[F(z)]_{\gamma}$  в области R.

Допустим, что существует число то:

$$w_0 = he^{i\vartheta}$$
 (0 < h < 1,  $\vartheta$  — действительно), (107,1)

такое, что, каковы бы ни были точка z области R и путь  $\gamma$ , идущий от начала координат к точке z,

$$[F(z)]_{\gamma} \neq w_0.$$
 (107,2)

Изучим последовательно свойства функций

$$f_1(z) = e^{-i\theta} f(z),$$
 (107,3)

$$\epsilon(z) = \frac{h - f_1(z)}{1 - hf_1(z)},\tag{107,4}$$

$$\beta(z) = \sqrt{\alpha(z)} + 12(\beta(0) = + \sqrt{h}),$$
 (107,5)

$$g(z) = \frac{\sqrt{h} - \beta(z)}{1 - \sqrt{h}\beta(z)}.$$
 (107,6)

Функция  $f_1(z)$ , очевидно, принадлежит к семейству  $\{f(z)\}$ , и ее значения, так же как и значения, получаемые ее аналитическим продолжением, отличны от h. Функция  $\alpha(z)$  связана с  $f_1(z)$  преобразованием Möbius'а, переводящим единичный круг в самого себя, и поэтому удовлетворяет условиям b), c), d) § 105. Функция  $\beta(z)$  также удовлетворяет этим условиям. В самом деле,  $\beta(z)$  продолжаема по всякому пути  $\gamma$ , потому что  $\alpha(z)$  продолжаема и не обращается в нуль. Эта функция  $\beta(z)$  удовлетворяет условию c), так как если бы продолжение  $\beta(z)$  по двум путям, заканчивающимся в различных точках, приводило бы к одинаковым эначениям, то же самое имело бы место для  $\alpha(z)$ . Наконец,

из (107,6) видно, что g(z) удовлетворяет условиям b), c) и d), а так как  $\beta(0) = \sqrt{h}$ , функция g(z) обращается в нуль при z = 0 и, следовательно, принадлежит к семейству  $\{f(z)\}.$ 

108. Разрешив уравнения (107,3) — (107,6) и определяя по-

следовательно  $\beta(z)$ ,  $\alpha(z)$ ,  $f_1(z)$  как функции

$$g(z) = t,$$
 (108,1)

найдем

$$f(z) = e^{i\theta} t \frac{2V\bar{h} - (1+h)t}{(1+h) - 2V\bar{h}t}.$$
 (108,2)

Правая часть этого выражения совпадает с функцией, исследованной в § 56. Она удет етворяет всем условиям леммы Schwarz'a (как можно показать прямыми вычислениями), и поэтому для всех t, удовлетворяющих неравенству 0 < |t| < 1:

$$\left| t \frac{2\sqrt{h} - (1+h)t}{(1+h) - 2\sqrt{h}t} \right| < |t|.$$
 (108,3)

Из (108,1), (108,2) и (108,3) следует

$$|f(z)| < |g(z)|$$
 (108,4)

во всех точках круга и за исключением центра.

Полученные результаты резюмируем в следующей теореме:

Теорема 15: Семейство  $\{f(z)\}$  компактно. Если семейство  $\{f(z)\}\$  содержит функцию f(z), отличную от постоянной и не принимающую при аналитическом продолжении в области R значения  $w_0$ ,  $|w_0| < 1$ , то это семейство содержит  $\frac{\partial pyryю}{\partial pyryю} \phi$ ункцию g(z), удовлетворяющую неравенству (108,4) npu  $0 < |z| < \rho$ .

109. Пусть  $z_1 \neq 0$  фиксированная точка круга х; определим

непрерывный функционал I (f) (см. § 100) равенством

$$I(f) = |f(z_1)|;$$
 (109,1)

так как семейство  $\{f(z)\}$  компактно, из § 100 следует, что существует по крайней мере одна функция семейства  $f_0(z)$ , удовлетворяющая неравенству

$$|f_0(z_1)| \ge |f(z_1)|,$$
 (109,2)

где f(z) — произвольная функция семейства. Область R предполагается ограниченной, поэтому при достаточно малом положительном  $\lambda$  функция  $f(z) = \lambda z$  принадлежит к семейству; это показывает, что функция  $f_0(z)$  не постоянна, так как по (109,2)

$$|f_0(z_1)| \ge \lambda |z_1| > 0.$$

Применяя теорему § 108, немедленно получаем теорему:

Теорема 16: Семейство  $\{f(z)\}$  содержит по крайней мере одну функцию  $f_0(z)$ , принимающую при аналитическом продолжении все значения, лежащие в круге |w| < 1.

110. Рассмотрим функции f(z), удовлетворяющие условиям b), c) и d) [но не обязательно условию a)] § 105 и обладаю-

щие еще следующим свойством:

е) каждой точке  $w_0$  единичного круга |w| < 1 соответствует путь  $\gamma_0$ , соединяющий начало координат с некоторой точкой  $z_0$  и приводящий к значению функции

$$[F(z_0)]_{\gamma_0} = w_0. (110,1)$$

Последняя теорема доказывает существование функций, обладающих свойством е). Из свойства с) следует, что  $z_0$  есть однозначная функция  $w_0$ , определенная внутри единичного круга |w| < 1. Эта функция обратна по отношению к  $[F(z)]_{\gamma_0} = w$  и поэтому регулярна в окрестности каждой точки  $w_0$ . Таким образом полученная функция

$$z = \varphi\left(w\right) \tag{110,2}$$

однозначна и голоморфна во всем единичном круге |w| < 1 (§ 63) и дает конформное отображение этого круга на поверхность Riemann'а, покрывающую всю область R.

111. Другая функция g(z), удовлетворяющая условиям b),

с), d) и е), имеет обратную функцию

$$z = \psi (\omega), \tag{111,1}$$

обладающую одинаковыми свойствами с  $\varphi(w)$ . Равенство (110,2) осуществляет соответствие между точками  $w_0$  единичного круга и точками  $z_0$  с соответствующими им путями  $\gamma_0$ . Эти пути могут быть получены как отображения на плоскости z прямых линий, соединяющих начало координат с точками  $w_0$ .

Если положим

$$\omega_0 = G[(z_0)]_{\gamma_0},$$

 $\omega_0$  будет однозначной, регулярной функцией  $w_0$ . Так как отношение между  $\omega$  и w взаимно, из § 68 следует, что уравнение  $\phi(w) = \psi(\omega)$  дает неевклидово движение в единичном круге.

112. Если область R односвязна, из теоремы о монодромности § 63 следует, что функция, обратная для (110,2), должна быть однозначной функцией z в области R. В этом случае функция  $z = \varphi(w)$  дает взаимно однозначное и конформное отображение единичного круга на область R.

Раньше (§ 64) было показано, что всякая односвязная область, имеющая по крайней мере две граничные точки, может быть отображена конформно на ограниченную область. Сопоставляя это с только что полученным результатом, находим:

Теорема 17: Всякую односвязную область, граница которой содержит больше одной точки, можно отобразить на внутренность единичного круга взаимно однозначным и конформным преобразованием; при этом можно найти преобразование, переводящее заданный линейный элемент этой области в произвольный линейный элемент единичного круга. Этими условиями конформное отображение определяется однозначным образом.

113. С другой стороны, если функция, обратная по отношению к (110,2), однозначна в области R, по § 63, область Rодносвязна.

Если R многосвязна, круг |w| < 1 содержит по крайней мере две точки w' и w'', в которых  $\varphi(w)$  принимает одинаковые значения,  $\varphi(w') = \varphi(w'')$ , и поэтому существует по крайней мере одно неевклидово движение круга |w| < 1, оставляющее  $\varphi(w)$  инвариантной [9]. Совокупность таких неевклидовых движений образует группу, а  $\varphi(w)$  есть автоморфная функция [10]. Точки круга |w| < 1, в которых  $\varphi(w)$  принимает равные значения, называются эквивалентными точками. Около каждой точки  $w_0$  круга |w| < 1 существует окрестность  $N_{w}$ , отображаемая функцией  $z=\varphi(w)$  взаимно однозначно на участок области R. Такая окрестность не может содержать эквивалентных точек, а поэтому ни одно из преобразований группы неевклидовых движений не может быть неевклидовым вращением (§ 45). Группа содержит только предельные вращения и неевклидовы сдвиги (§ 46). Повторное применение неевклидова сдвига, а также предельного вращения никогда не может привести к тождественному преобразованию; отсюда следует, что группа преобразований, оставляющих  $\varphi(w)$  инвариантной, бесконечна, а каждой точке круга |w| < 1 соответствует бесконечное множество эквивалентных точек.

Теорема 18: Если область Р многосвязна, функция (110,2) автоморфна. Преобразования, оставляющие эту функцию инвариантной, образуют бесконечную группу предельных вра-

шений и неевклидовых сдвигов.

114. Эту группу легко получить в случае двусвязной области. Предположим сначала, что область R получена удалением одной точки из односвязной области. В этом случае существует взаимно однозначное и конформное преобразование, отображающее R на круг с выколотым центром

$$0 < |t| < 1.$$
 (114,1)

Посредством элементарных преобразований можно показать, что группа, соответствующая области (114,1), есть циклическая группа предельных вращений [11]. Обратно мы докажем, что если соответствующая группа есть циклическая группа предельных вращений, область R получается удалением одной точки из односвязной области. При этом нам будет весьма полезно следующее замечание, сделанное впервые Т. Radó: пусть  $z=\varphi(t)$ есть однозначная голоморфная функция, определенная в области (114,1) и ограниченная в окрестности точки t=0. Предположим еще, что в различных точках этой области  $\varphi(t)$  принимает различные значения  $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ . По теореме Riemann'a можно дополнить определение функции  $\varphi(t)$  некоторым значением  $z_0$ при t=0 так, чтобы она стала голоморфной в полном круге |t| < 1. Легко убедиться, что при  $t' \neq 0$ ,  $\varphi(t') \neq z_0$ . В самом деле, если бы  $\varphi(t')=z_0$ , существовала бы окрестность точки t', отображаемая функцией  $z = \varphi(t)$  на некоторую окрестность точки  $z_0$ , а отсюда легко заключить, что функция  $\varphi(t)$  принимала бы одинаковые значения в различных точках области (114,1). Таким образом  $\varphi(t)$  дает взаимно однозначное и конформное отображение области (114,1) на односвязную область с одной выколотой точкой. Предположим теперь, что точки, эквивалентные  $w_0$ ,  $|w_0| < 1$ , получаются из нее преобразованиями циклической группы предельных вращений. Тогда можно подобрать преобразование Möbius'а круга | w | < 1 на полуплоскость.  $\Re(u) < 0$ , при котором предельному вращению, образующему группу, соответствует обычный перенос плоскости на вектор  $2\pi i$ . Если положим  $t=e^{u}$ , область R отобразится взаимно однозначно и конформно на круг с выколотым центром 0 < |t| < 1. Из результата Radó следует, что область R получается из односвязной путем удаления одной точки.

115. Пусть теперь граница области R состоит из двух континуумов  $C_1$  и  $C_2$ , ни один из которых не обращается в точку. Континуум  $C_2$  ограничивает односвязную область, содержащую  $C_1$ . Эта область может быть отображена конформно на внутреннюю область круга. При этом отображении область R переходит

в двусвязную область, ограниченную континуумом  $C_1^{'}$  и окружностью  $C_a$ . Отобразим теперь внешнюю, односвязную часть плоскости, ограниченную континуумом С, на внутреннюю область единичного круга. Тогда  $C_{2}^{'}$  перейдет в некоторую аналитическую кривую. Это показывает, что, не теряя общности, можно предположить границу двусвязной области, состоящей из единичного круга и аналитической кривой без двойных точек, окружающей начало координат.

Преобразование  $z = e^u$  отображает криволинейную, периодическую полосу  $R_u$  *и*-плоскости на область R. При этом заданной точке  $z_0$  соответствуют точки

$$u_k = u_0 + 2k\pi i$$
  $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$ 

Точки, эквивалентные  $u_0$ , получаются из нее преобразованиями циклической группы. Так как область  $R_u$  односвязна, существует взаимно однозначное и конформное преобразование  $u = \varphi(w)$ отображающее ее на круг |w| < 1.  $u = \varphi(w)$  переводит точки  $u_k$ в эквивалентные точки круга | w | < 1. Соответствующая группа, очевидно, циклическая и образована некоторым неевклидовым переносом, так как возможность предельного вращения исключается результатами § 114.

116. При неевклидовом сдвиге две точки окружности круга. А и В остаются неподвижными. Пусть функция

$$w = \psi(t)$$

дает конформное отображение полосы  $|\Re(t)| < h$  на внутренность круга |w| < 1 (§ 52), при котором бесконечно удаленные части полосы соответствуют окрестностям точек А и В. Легко усмотреть, что при этом преобразовании неевклидову сдвигу, рассмотренному выше, соответствует обычный евклидов перенос полосы вдоль самой себя. Подходящим подбором h можно сделать величину переноса равной 2 ті.

Положим  $t = \ln \omega$ . Функция

$$z = e^{\varphi \, [\psi \, (\ln \, \omega)]} = \Phi(\omega)$$

дает взаимно однозначное и конформное отображение кругового кольца на двусвязную область R.

Теорема 19: Всякая двусвязная область, граница которой состоит из двух континуумов, содержащих больше одной точки, может быть отображена взаимно однозначным и конформным преобразованием на внутреннюю область кольца,

ограниченного двумя концентрическими окружностями.

117. Пусть односвязная область Р отображена конформно на круг |w| < 1. Двум точкам  $z_1$  и  $z_2$  области R отображение ставит в соответствие две точки  $w_1$  и  $w_2$  круга, отстоящие друг от друга на неевклидовом расстоянии  $D(w_1, w_2)$ , не зависящем от специального выбора преобразования. Рассматривая число  $D\left(w_{1},\,w_{2}\right)$  как неевклидово расстояние между точками  $z_{1}$  и  $z_{2}$ , мы определим в области R неевклидову метрику.

Можно установить неевклидову метрику и для многосвязной области R, но определение будет несколько отличным, так как в этом случае каждой точке г соответствует бесконечное множество точек w. Спрямляемая кривая  $\gamma_z$  области R отображается на бесконечное множество кривых  $\gamma_{w_1}, \gamma_{w_2}, \ldots w$ -плоскости. Каждая из этих кривых может быть переведена в другие неевклидовыми движениями, и поэтому все кривые имеют одинаковую неевклидову длину. Эту длину мы припишем кривой ү...

В многосвязной области можно приписать неевклидову длину кривым, тогда как понятие расстояния между двумя точками не имеет определенного смысла.

118. Рассмотрим кольцо

$$r_1 < |w| < r_2 \tag{118,1}$$

и принадлежащую к нему замкнутую кривую ү, окружающую малый круг один раз. Пусть  $\alpha$  нижний предел неевклидовых длин  $L_{\gamma}$  всех таких кривых. Число  $\alpha$  может быть вычислено методами главы II и III [12]

$$\alpha = \frac{4\pi^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Этот результат показывает, что два кольца могут быть отображены друг на друга только тогда, когда они подобны.

119. Нормальные семейства, образованные функциями, отображающими круг на однолистные области. Пусть  $\{T\}$ семейство однолистных, односвязных областей ш-плоскости, содержащих начало координат и не содержащих бесконечно удаленную точку, а  $\{f(z)\}$  семейство функций, дающих отображение круга |z| < r на области T и удовлетворяющих условию f(0) = 0.

Предположим, что удовлетворяется одно из следующих условий:  $\alpha$ ) расстояние a границы любой из областей T от точки w=0 не превышает фиксированного числа M.

 $\beta$ ) Все функции f(z) удовлетворяют неравенству  $|f'(0)| \leq M$  Тогда, на основании результатов, полученных выше (§ 80, 81, 100), функции семейства  $\{f(z)\}$  равномерно ограничены во всяком круге  $|z| < \theta r$ ,  $(0 < \theta < 1)$ , и поэтому семейство  $\{f(z)\}$  нормально в круге |z| < r.

По теореме § 104 это семейство, дополненное функцией  $f(z) \equiv 0$ , компактно. В случае  $\beta$ ) добавление  $f(z) \equiv 0$  станет излишним, если условие  $|f'(0)| \leq M$  заменить более узким

$$0 < m \le |f'(0)| \le M$$
.

120. Ядро последовательности областей. Рассмотрим семейство областей  $\{T\}$ , для определенности, удовлетворяющее условию  $\alpha$ ) § 119. Выберем в  $\{T\}$  последовательность областей  $T_1, T_2, \ldots$  так, чтобы соответствующие функции  $f_1(z), f_2(z), \ldots$  регулярно сходились в круге |z| < r к некоторой предельной функции  $f_0(z)$ . Предположим, что  $f_0(z)$  не есть тождественный нуль; тогда по § 104  $f_0(z)$  отображает круг |z| < r на однолистную область  $T_0$ .

Пусть  $A_w$  некоторый континуум (замкнутое, связное множество), лежащий внутри  $T_0$  и содержащий точку w=0. При до-

статочно больших значениях n области  $T_n$  содержат  $A_w$ . Обозначим через  $A_n$  изображение  $A_m$  при преобразо

Обозначим через  $A_z$  изображение  $A_w$  при преобразовании  $w=f_0(z)$ . Так как множество  $A_z$  замкнуто и лежит внутри круга |z| < r, оно лежит целиком внутри некоторого круга  $|z| < \tau r$ , где  $0 < \tau < 1$ .

Если высказанное предложение не имеет места, существует последовательность целых чисел  $n_1 < n_2 < \dots$  таких, что функции

$$w = f_{n_k}(z) \tag{120,1}$$

отображают круг  $|z| < \tau r$  на множество точек, не покрывающее континуум  $A_w$  и, следовательно, континуум  $A_w$  содержит по крайней мере одну точку  $w_{n_k}$ , переходящую при (120,1) в точку  $z_{n_k}$  окружности  $|z| = \tau r$ . Из последовательности  $z_{n_k}$  можно извлечь подпоследовательность  $z_{n'_k}$ , сходящуюся к некоторому пределу  $z_0$ . Так как функции  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ , ... непрерывно сходятся,

$$f_0(z_0) = \lim_{k \to \infty} f_{n'_k}(z_{n'_k}),$$

а поэтому точка  $w_0 = \lim_{k \to \infty} w_{n'_k}$  содержится во множестве  $A_w$ 

Но это невозможно, принимая во внимание построение круга  $|z| = \tau r$ .

121. Предположим теперь, что существует область  $T^*$ , содержащая точку w=0 и обладающая свойством, доказанным только что для области  $T_0$ ; именно: каждый континуум  $A_w$ , принадлежащий области  $T^*$  и содержащий точку w=0, начиная с некоторого n, содержится во всех областях  $T_n$ . Мы докажем тогда, что функция  $f_0(z)$  не постоянна и что  $T^*$  содержится в  $T_0$ .

Пусть  $w_0$  произвольная точка области  $T^*$ . Рассмотрим замкнутую область  $A_w$ , содержащую точки  $w_0$  и w=0 и лежащую внутри области  $T^*$ . По предположению при достаточно больших значениях n,  $T_n$  покрывает  $A_w$ , и, следовательно, функция  $\varphi_n(w)$ , обратная для  $f_n(z)$ , определена в  $A_w$ . Все функции  $\varphi_n(w)$  не превышают по абсолютной величине r и поэтому образуют нормальное семейство.

Последовательность  $\{\varphi_n(w)\}$  содержит подпоследовательность  $\{\varphi_{n_k}(w)\}$  функций, определенных в  $A_w$  и сходящихся непрерывно к некоторому пределу  $\psi(w)$ . По  $\S$  104 функция  $\psi(w)$  либо постоянна, и тогда вследствие  $\psi(0)=0$  есть тождественный нуль, либо дает конформное отображение  $A_w$  на область, лежащую внутри круга |z| < r.

В обоих случаях точка  $z_0 = \psi(w_0)$  принадлежит внутренности

круга. Если

$$z_k = \varphi_{n_k}(w_0), \tag{121,1}$$

то  $z_k \rightarrow z_0$ , и так как  $z_0$  находится внутри круга |z| < r,

$$f_{n_k}(z_k) \to f_0(z_0).$$

Но из (121,1)

$$f_{n_k}(z_k) = w_0,$$

откуда немедленно следует

$$w_0 = f_0(z_0).$$

Так как  $w_0$  произвольная точка области  $T^*$ ,  $f_0(z)$  не может быть постоянной, и уравнение  $w=f_0(z)$  дает конформное отображение круга |z| < r на область  $T_0$ , содержащую  $T^*$ .

Область  $T_0$ , полученная из круга |z| < r преобразованием  $w = f_0(z)$ , где  $f_0(z)$  предельная функция, есть максимальная область, обладающая следующим свойством: всякий конти-

нуум, содержащий точку w=0 и принадлежащий области, начиная с некоторого n, покрывается каждой областью  $T_m$ .

Предыдущие рассуждения неявно показывают, что в случае сходимости последовательности  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ , ... к тождественному нулю не существует окрестности w=0, принадлежащей всем областям  $T_n$ , начиная с некоторого значения n.

122. Пусть дана последовательность односвязных областей  $T_1, T_2, \ldots$ , содержащих точку w=0 и удовлетворяющих, например, условию  $\alpha$ ) § 119. Мы поставим в соответствие этой последовательности множество точек K, называемое ее ядром.

Если не существует круга с центром в точке w=0, покрываемого всеми областями  $T_n$ , имеющими достаточно большой номер n, ядро состоит из одной точки w=0. В противном случае ядро K есть максимальная область, обладающая следующим свойством: каждый континуум, заключающий точку w=0 и принадлежащий k K, покрывается всякой областью  $T_n$  при достаточно больших значениях n.

Это свойство определяет ядро последовательности областей однозначным образом. Предположим, что существует окрестность точки  $w_0$ , покрываемая всеми областями  $T_n$ , начиная с некоторого n. Пусть  $\mathbf{x}_{w_0}$  максимальный круг с центром в точке  $w_0$  такой, что каждый меньший концентрический круг покрывается  $T_n$  при достаточно больших n.

Когда точка  $w_0$  пробегает всю w-плоскость, внутренние области всех кругов  $z_{w_0}$  образуют или пустое множество или открытое множество, распадающееся на сумму не перекрывающихся областей. Если среди них существует область, содержащая точку w=0, эта область есть ядро последовательности; в противном случае ядро состоит из единственной точки w=0.

123. Последовательность областей  $\{T_n\}$  называется сходящейся к своему ядру K, если любая ее последовательность  $T_{n_1}$ ,  $T_{n_2}$ , . . . определяет ядро, совпадающее с K.

Так как области  $T_n$  предполагаются односвязными, по § 112 существует последовательность функций  $f_1(z), f_2(z), \ldots$ , дающих конформное отображение круга |z| < 1 на области  $T_1$ ,  $T_2$ , . . . и удовлетворяющих условиям

$$f_n(0) = 0, f'_n(0) > 0.$$
 (123,1)

Предположим, что функции  $f_n(z)$  регулярно сходятся к пределу  $f_0(z)$  внутри круга. Тогда всякая подпоследовательность  $f_{n_1}(z)$ ,  $f_{n_2}(z)$ , . . . сходится к тому же пределу,

$$\lim_{h \to \infty} f_{n_h}(z) = f_0(z), \tag{123,2}$$

и поэтому  $f_0(z)$  отображает круг |z| < 1 на ядро K' последовательности  $\{T_{n_k}\}$ . Отсюда следует K' = K, т. е. последовательность  $\{T_n\}$  сходится к своему ядру.

Имеет место также и обратное предложение: сходимость последовательности областей к ядру влечет за собой регулярную сходимость последовательности функций  $\{f_n(z)\}$  в круге |z|<1. В самом деле, функции  $f_n(z)$  образуют нормальное семейство. Если последовательность  $\{f_n(z)\}$  расходится, существуют две ее подпоследовательности

$$f_{n_1}(z), f_{n_2}(z), \dots$$
 (123,3)

$$f_{m_1}(z), f_{m_2}(z), \dots$$
 (123,4)

регулярно сходящиеся в круге |z| < 1 к различным функциям  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ . Но это приводит к противоречию. В самом деле, функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  дают отображение круга |z| < 1 на ядро последовательности  $\{T_n\}$  и по (123,1)

$$\varphi(0) = 0, \ \varphi'(0) > 0; \ \psi(0) = 0, \ \psi'(0) > 0.$$
 (123,5)

На основании теоремы о единственности конформного отображения (§ 68)  $\varphi(z) \equiv \psi(z)$ .

124. Примеры. а) Пусть область  $T_n$  совпадает со всей w-плоскостью, рассеченной вдоль отрицательной части действительной оси от точки —  $\infty$  до точки —  $\frac{1}{n}$ . Обозначим через  $f_n(z)$  функцию, отображающую круг |z| < 1 на эту область и удовлетворяющую условиям (123,1).  $f_n(z)$  сходятся непрерывно к нулю, и, следовательно, ядро последовательности областей состоит из одной точки. Действительно,

$$f_n(z) = \frac{4z}{n(1-z)^2}. (124,1)$$

b) Пусть w-плоскость рассечена вдоль частей мнимой оси, лежащих ниже точки  $-\frac{i}{n}$  и выше точки  $+\frac{i}{n}$ . Рассмотрим

функцию  $f_n(z)$ , отображающую полуплоскость  $\Re(z)>0$  на полученную область и удовлетворяющую условиям

$$f_n(0) = 1, f'_n(0) > 0.$$
 (124,2)

Из общей теории следует, что  $f_n(z)$  сходится непрерывно к z в этой полуплоскости. Это можно сейчас же проверить непосредственным вычислением

$$_{n}(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) + \frac{\sqrt{1 + n^{2}}}{2n} \left( z - \frac{1}{z} \right).$$
 (124,3)

с) Пусть w-плоскость рассечена вдоль дуги единичного круга, соединяющей точки  $e^{i\frac{\pi}{n}}$  и  $e^{-i\frac{\pi}{n}}$  длиною  $2\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)$ . Полученная эдносвязная область  $T_n$  имеет точку  $w=\infty$  в качестве внутренней точки. Пусть внутренность единичного круга |z|<1 отображается на область  $T_n$  функцией  $f_n(z)$ , удовлетворяющей условиям (123,1). Этот случай аналогичен случаю b) и приводит к выражению

$$f_n(z) = z \frac{1 - z \cos \frac{\pi}{2n}}{\cos \frac{\pi}{2n} - z}$$
 (124,4)

Как можно было ожидать, функция  $f_n(z)$  имеет полюс внутри круга |z| < 1, но, несмотря на это, семейство  $\{f_n(z)\}$  нормально. В этом легко убедиться, заметив, что все рассматриваемые области получаются из областей случая b) одним и тем же преобразованием Möbius'а.

125. Одновременные отображения вложенных областей. Решение следующей задачи важно для теории униформизации, т. е, представления любых аналитических функций однозначными функциями (Poincaré и Koebe). Рассмотрим бесконечную последовательность комплексных плоскостей  $z_1, z_2, \ldots$ , а на каждой из них две односвязных области  $C_n^{(n-1)}$  и  $C_n^{(n)}$ ;  $C_n^{(n-1)}$  содержится в  $C_n^{(n)}$  и содержит начало координат  $\frac{1}{n}$ .

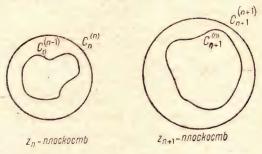
Попытаемся построить на w-плоскости последовательность вложенных друг в друга и содержащих начало координат обла-

<sup>1</sup> Области могут иметь общие граничные точки. Перев.

стей  $C^{(1)}$ ,  $C^{(2)}$ , . . . так, чтобы функция  $\varphi^{(n)}(z_n)$ , отображающая  $C^{(n)}_n$  на  $C^{(n)}$  и удовлетворяющая условиям

$$\varphi^{(n)}(0) = 0, \quad \varphi^{(n)}(0) > 0,$$

отображала также область  $C_n^{(n-1)}$  на  $C^{(n-1)}$ .



Фиг. 26.

Пусть  $C_n^{(n)}$  отображена конформным преобразованием  $\psi(z_n)$  ( $\psi(0)=0$ ,  $\psi'(0)>0$ ) на область  $\Gamma_n^{(n)}$ , лежащую в той же плоскости; тогда  $C_n^{(n-1)}$  перейдет в некоторую область  $\Gamma_n^{(n-1)}$ , вложенную в  $\Gamma_n^{(n)}$ . Сущность разбираемой задачи не изменится, если заменить области  $C_n^{(n-1)}$ ,  $C_n^{(n)}$  областями  $\Gamma_n^{(n-1)}$ ,  $\Gamma_n^{(n)}$ . В частности, отсюда следует, что, не теряя общности, можно предполагать область  $C_n^{(n)}$  кругом

$$|z_n| < r_n \ (n = 1, 2, \ldots).$$
 (125,1)

Пусть функция

$$z_{n+1} = f_{n+1}^{(n)}(z_n) \tag{125,2}$$

дает конформное отображение круга  $|z_n| < r_n$  на область  $C_{n+1}^{(n)}$  и удовлетворяет условиям  $f_{n+1}^{(n)}(0) = 0$ ,  $f_{n+1}^{'(n)}(0) > 0$ . Если  $r_n$  фиксирован,  $f_{n+1}^{'(n)}(0)$  пропорциональна  $r_{n+1}$ , и  $r_{n+1}$  можно подобрать так, чтобы

$$f_{n+1}^{(n)}(0) = 0, \ f_{n+1}^{(n)}(0) = 1.$$
 (125,3)

Мы положим  $r_1 = 1$  и потребуем, чтобы условия (125,3) выполнялись при всех значениях n. Этим требованием  $r_n$  определяется однозначно.

**126.** Определим теперь функции  $f_{n+k}^{(n)}(z_n)$  системой уравнений

$$f_{n+2}^{(n)}(z_n) = f_{n+2}^{(n+1)}(f_{n+1}^{(n)}(z_n)), \qquad (126,1)$$

$$f_{n+k}^{(n)}(z_n) = f_{n+k}^{(n+1)}(f_{n+1}^{(n)}(z_n)). \tag{126,2}$$

Если функции  $f_{n+1}^{(n)}(z_n)$  известны,  $f_{n+k}^{(n)}(z_n)$  могут быть последовательно вычислены. Из (125,3) следует

$$f_{n+h}^{(n)}(0) = 0, f_{n+h}^{(n)}(0) = 1.$$
 (126,3)

Заметим, что соотношение

$$w = f_{n+k}^{(n)}(z_n) \tag{126,4}$$

дает конформное отображение круга  $|z_n| < r_n$  на однолистную область w-плоскости. Функции  $f_{n+k}^{(n)}(z_n)$  (k=1,2,...;n=1,2,...) удовлетворяют условию  $\beta$ ) § 119 и, следовательно, образуют нормальное семейство.

127. При всяком n существует последовательность целых чисел  $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}, \ldots$  такая, что последовательность функций

$$f_{n+k_p^{(n)}}^{(n)}(z_n)$$
  $(p=1, 2, ...)$  (127,1)

непрерывно сходится в круге  $|z_n| < r_n$ . Применяя диагональный процесс, выделим из чисел  $k_p^{(n)}$  последовательность  $k_1 < k_2 < \ldots$ , обладающую этим свойством при всех значениях n, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} f_{n+k_p}^{(n)}(z_n) = \varphi^{(n)}(z_n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$
 (127,2)

во всей области  $|z_n| < r_n$  [13].

По § 104 функция

$$w = \varphi^{(n)}(z_n)$$

дает конформное отображение круга  $|z_n| < r_n$  на область  $C^{(n)}$ . Полученные области дают решение нашей задачи. В самом

деле, заменяя в (126,2) k на  $k_p$  и переходя к пределу на основании (127,2) находим,

$$\varphi^{(n)}(z_n) = \varphi^{(n+1)}(f_{n+1}^{(n)}(z_n)). \tag{127,3}$$

Это доказывает утверждение.

128. Относительно построенной последовательности областей  $C^{(n)}$  мы сделаем еще несколько замечаний.

Если  $r_{n+1} \leqslant r_n$ , применение леммы Schwarz'а к (125,2) дает  $|f_{n+1}^{\prime(n)}(0)| < 1$ , поэтому по (125,3)  $r_n < r_{n+1}$ , и, следовательно, или

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \infty, \tag{128,1}$$

или последовательность  $r_n$  сходится к конечному пределу R,

$$\lim_{n \to \infty} r_n = R. \tag{128,2}$$

Мы рассмотрим эти случаи отдельно.

129. Обозначим через  $a_n$  расстояние границы области  $C^{(n)}$  от точки w=0. Функция  $\varphi^{(n)}(z_n)$  отображает круг  $|z_n| < r_n$  на однолистную область, и поэтому по (82,4)

$$a_n > \frac{r_n}{4}$$
. (129,1)

В случае (128,1) последовательность  $a_1, a_2, \ldots$  стремится к бесконечности, и последовательность областей  $C^{(n)}$  покрывает всю w-плоскость.

130. Рассмотрим теперь случай (128,2). Построение (126,2) показывает, что  $|f_{n+h}^{(n)}(z_n)| < r_{n+h} < R$ ; переходя к пределу, получаем

$$|\varphi^{(n)}(z_n)| < R$$

при всех значениях n. Поэтому области  $C^{(1)}$ ,  $C^{(2)}$ , . . . , а также и множество точек D. покрываемое последовательностью областей, содержится в круге |w| < R. Множество D есть также односвязная область.

Пусть функция

$$t = \psi(w) \tag{130,1}$$

отображает область D на круг |t| < R, причем  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi'(0) > 0$ . На основании леммы Schwarz'а

$$\psi'(0) \geqslant 1.$$
 (130,2)

С другой стороны, функции

$$t = \Psi_n(z_n) = \psi(\varphi^{(n)}(z_n)) \quad (n = 1, 2, ...)$$
 (130,3)

дают конформное отображение круга  $|z_n| < r_n$  на области, лежащие внутри круга |t| < R. По лемме Schwarz'а

$$\Psi_n'(0) \leqslant \frac{R}{r_n}.\tag{130,4}$$

Так как  $\varphi'^{(n)}(0) = 1$ , (130,3) дает

$$\Psi'_n(0) = \psi'(0),$$
 (130,5)

и, следовательно,  $\psi'(0) \leq \frac{R}{r_n}$ . Из (128,2) следует  $\psi'(0) \leq 1$ , и поэтому в (130,2) имеет место знак равенства. Но это может быть только тогда, когда область D совпадает с кругом |t| < R, т. е. области  $C^{(n)}$  равномерно сходятся к области |w| < R.

## ГЛАВА VI

## соответствие границ

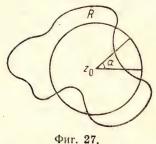
131. Неравенство Lindelöf'a. Пусть R произвольная область z-плоскости, содержащая точку  $z_0$ . Область R может быть многосвязной. Предположим, что на круге  $|z-z_0|=r$  существует дуга, стягивающая угол

$$\alpha > \frac{2\pi}{n},$$

лежащая вне области R. Здесь п целое положительное число. Повора чвая область R вокруг точки  $z_0$  на углы

$$\frac{2\pi}{n}$$
,  $\frac{4\pi}{n}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{2(n-1)\pi}{n}$ ,

мы получим ряд новых областей  $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ . Общая часть областей  $R, R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$  есть открытое множество,



содержащее точку  $z_0$  и не имеющее ни внутренних, ни граничных точек на окружности  $|z-z_0|=r$ . Между областями, на которые распадается эта общая часть, существует одна,  $R_0$ , содержащая точку  $z_0$ . Граница  $\gamma$  области  $R_0$  находится внутри круга  $|z-z_0| < r$  и состоит из граничных точек областей  $R, R_1, \ldots, R_{n-1}$ .

**132**. Пусть f(z) ограниченная аналитическая функция, определенная в области R,

$$|f(z)| < M.$$
 (132,1)

Предположим, далее, что если ζ произвольная точка границы R, лежащая внутри круга  $|z-z_0| < r$ , и  $z_1, z_2, \ldots$  последовательность точек области R, сходящая к ζ, то

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} |f(z_n)| \le m \quad (m < M), \tag{132,2}$$

где т не зависит ни от выбора точки ζ, ни от последовательности  $\{z_n\}$ .

Рассмотрим функцию

$$f_b(z) = f(z_0 + e^{\frac{2k\pi i}{n}}(z - z_0)) \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1) \quad (132,3)$$

она голоморфна в области  $R_k$ , и, следовательно,

$$F(z) = f(z)f_1(z) \dots f_{n-1}(z)$$
 (132,4)

голоморфна в  $R_0$ . Если  $\{z_n\}$  последовательность точек  $R_0$  сходящаяся к граничной точке  $\zeta$ , из наших предположений следует

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |F(z_n)| \le M^{n-1}m, \tag{132,5}$$

и так как это выполняется для всякой граничной точки области, то

$$|F(z_0)| \leqslant M^n \frac{m}{M}.$$

По (132,3) и (132,4)

$$F(z_0) = (f(z_0))^n$$

откуда получаем окончательное неравенство

$$|f(z_0)| \le M \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{n}}.\tag{132,6}$$

133. Следующая теорема получается почти непосредственно из неравенства Lindelöf'a (132,6).

Теорема 1: Пусть f(z) ограниченная аналитическая функция, определенная в односвязной области R, граница которой содержит больше одной точки. Если f(z) непрерывна и принимает постоянное значение а во всех точках границы, лежащих внутри некоторой окрестности  $N_z$  одной из граничных точек  $\zeta$ , то  $f(z) \equiv \alpha$ .

Предположим сначала, что  $\zeta$  єсть предельная точка для точек, ежащих вне области R. Если  $z_0$  точка области R, достаточно близкая к  $\zeta$ , можно построить круг  $|z-z_0| \leqslant r$ , лежащий внутри  $N_{\zeta}$ , граница которого содержит точки, лежащие вне области R. Применяя неравенство Lindelöf'а к функции  $f(z)-\alpha$ , получим  $f(z_0)=\alpha$ , откуда немедленно следует высказанная теорема.

Если для точки  $\zeta$  не выполняется предыдущее предположение, мы рассмотрим функцию  $F(t)=f(\zeta+t^2)-\alpha$ . Сравнивая с таким же преобразованием, примененным в § 65, убеждаемся, что F(t) определена в области  $R_t$ , имеющей граничную точку t=0, предельную для внешних точек. Теперь можно применить рассуждения, примененные в предыдущем случае.

134. Лемма 1 о соответствии границ. Пусть  $R_w$  — одно-

связная ограниченная область ш-плоскости и функция

$$w = f(z) \tag{134,1}$$

дает конформное отображение  $R_w$  на область  $R_s$  z-плоскости. Мы предположим, что область  $R_s$  ограничена замкнутой жордановой кривой c и что начала координат  $O_w$  и  $O_z$  лежат внутри соответствующих областей  $R_w$ ,  $R_s$  и соответствуют друг другу при отображении.

Пусть  $\gamma_w$  — сечение внутри области  $R_w$ . Под этим подразумевается жорданова кривая, соединяющая внутреннюю точку  $R_w$  с ее граничной точкой  $\omega$ , такая, что всякое бесконечное множество точек  $\gamma_w$  либо имеет хотя бы одну предельную точку, лежащую внутри области, либо сходится к  $\omega$ .

Мы докажем.

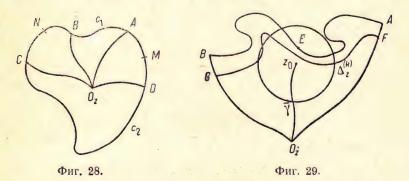
Теорема 2: Сечение  $\gamma_w$  преобразуется в кривую  $\gamma_z$ , являю-

щуюся сечением внутри области R.

135. Для доказательства воспользуемся теоремой Jordan'а о том, что c разделяет плоскость на две й только две области, и другими простейшими свойствами области  $R_z$ . Именно: каждая точка жордановой кривой c есть предельная точка для внешних точек и может быть соединена с каждой внутренней точкой области сечением.

Предположим, что на кривой  $\gamma_s$  существует множество точек, имеющее две различные предельные точки M и N на границе области c. Мы покажем, что это приводит к противоречию. Точки M и N разбивают жорданову кривую c на две дуги  $c_1$  и  $c_2$ . Пусть A, B, C, D четыре точки кривой c, расположенные в порядке ее положительного обхода, из которых две первые лежат на дуге  $c_1$ , а две другие на дуге  $c_2$ . Соединим эти четыре точки с  $O_s$  сечениями, не пересекающимися нигде, кроме точки  $O_s$ . Эти сечения делят область  $R_s$  на четыре подобласти. По предположению  $\gamma_w$  содержит последовательность точки, попадающие поочередно в области  $O_sDA$  и  $O_sBC$ . Дуга  $\gamma_s$ , соединяющая две

последовательные точки преобразованной последовательности, должна пересекать одну из областей  $O_zAB$  и  $O_zCD$ . Для определенности предположим, что существует бесконечное множество таких дуг, пересекающих  $O_{\mathbf{z}}AB$ . Пусть  $\Delta_{\mathbf{z}}^{(1)}$ ,  $\Delta_{\mathbf{z}}^{(2)}$ , ...— части этих дуг, лежащие внутри области О АВ и имеющие конечные точки на линиях  $O_{\mathfrak{g}}A$  и  $O_{\mathfrak{g}}B$ . Соответствующие дуги  $\Delta_{\mathfrak{w}}^{(1)}, \Delta_{\mathfrak{w}}^{(2)}, \ldots$ на 7, не имеют общих точек и равномерно стягиваются к точке  $\omega$ , поэтому дуги  $\Delta_z^{(1)}$ ,  $\Delta_z^{(2)}$ , ... равномерно сходятся к дуге AB кривой c. Рассмотрим область  $O_{a}AB$ . На дуге AB



мы возьмем точку E, расстояние которой от сечений  $O_{\imath}A$  и  $O_{\imath}B$  обозначим  $2\eta>0$ . Из точки  $z_0$  области  $O_{\imath}AB$ , отстоящей от E на расстоянии, меньшем  $\eta$ , проведем круг K радиуса  $\eta$ . Точка Е находится внутри круга К и есть предельная точка точек, внешних для области  $R_{\mathfrak{s}}$ ; поэтому на круге K существует дуга  $K_1$ , лежащая вне  $R_{\mathfrak{s}}$ . Пусть  $\alpha$  угол, опирающийся на эту дугу, тогда можно подобрать целое число n, удовлетворяющее неравенству  $\alpha > \frac{2\pi}{n}$ . Соединим  $O_z$  с точкой  $z_0$ , кривой  $\overline{\gamma}$ , лежащей внутри  $O_zAB$ . Если k достаточно велико,  $k>k_0$ , то  $\Delta_z^{(k)}$ не имеет общих с  $\gamma$  точек, и, следовательно, область  $O_z F \Delta_z^{(h)} G$ (фиг. 29) есть часть  $O_zAB$ , содержащая  $z_0$ , но не содержащая ни внутренних, ни конечных точек дуги  $K_1$ . Пусть в произвольное малое положительное число. Обозначим через M (конечный) диаметр области  $R_w$  и выберем  $k > k_0$  и настолько большим, чтобы  $\Delta_{m}^{(h)}$  лежала внутри круга

Мы применим теперь неравенство Lindelöf'а к функции  $f(z) - \omega$  в области  $O_z F \Delta_z^{(h)} G$ . Точки границы этой области, лежащие внутри K, принадлежат к дуге  $\Delta_z^{(h)}$ , поэтому можно положить

$$m = M \epsilon^n$$
.

Из неравенства (132,6) имеем:  $|f(z_0) - \omega| < M$ є, и так как є было произвольным,

 $f(z_0) = \omega$ .

Это приводит к желаемому противоречию: точка  $w_0 = f(z_0)$  должна лежать внутри  $R_w$ , а  $\omega$  есть граничная точка этой области.

136. Лемма 2. Рассмотрим два сечения  $\gamma_w$  и  $\gamma_w''$  внутри области  $R_w$ , соединяющие точку  $O_w$  с граничными точками  $\omega'$  и  $\omega''$  и не имеющие точки пересечения, отличной от  $O_w$ . По доказанному  $\gamma_w'$  и  $\gamma_w''$  отображаются на сечения  $\gamma_z'$  и  $\gamma_z''$  в области  $R_z$ , соединяющие  $O_z$  с двумя точками  $\zeta'$  и  $\zeta''$  жордановой кривой c. Мы установим необходимые и достаточные условия для совпадения точек  $\zeta'$  и  $\zeta''$ .

Кривыя  $(\gamma_z' + \gamma_z'')$  разбивает  $R_z$  на две области  $R_z^{(1)}$  и  $R_z^{(2)}$ . Если точки  $\zeta'$  и  $\zeta''$  совпадают, граница одной из этих областей, например  $R_z^{(1)}$ , состоит из  $\gamma_z'$  и  $\gamma_z''$ , так как c есть кривая Jordan'a.

Области  $R_z^{(1)}$  соответствует область  $R_w^{(1)}$ , граница которой может содержать граничные точки области  $R_w$ , но ни одна из граничных точек  $R_w^{(1)}$  не может отстоять на конечном расстоянии от линии  $(\gamma_w' + \gamma_w'')$ . В самом деле, предположим, что существует такая точка  $\omega$ . Тогда, если последовательность точек области  $R_w^{(1)}$ ,  $w_1$ ,  $w_2$ ,... сходится к ее граничной точке, лежащей в достаточно малой окрестности  $N_\omega$  точки  $\omega$ , значения функции  $\varphi(w)$ , обратной для f(z), сходятся к пределу  $\zeta$ . По § 133  $\varphi(w)$  есть константа, но это невозможно.

С другой стороны, если  $R_w^{(1)}$  обладает указанным свойством и, в частности,  $\omega' = \omega''$ , то  $\zeta' = \zeta''$ . Это легко доказать, применяя предыдущие рассуждения к функции w = f(z) и области  $R_z^{(1)}$ .

137. Отображение жордановых областей (23). Предположим, что обе области  $R_w$  и  $R_s$  ограничены жордановыми кривыми  $c_w$  и  $c_z$ . Пусть  $\omega$ — произвольная точка  $c_w$  и  $w_1$ ,  $w_2$ , . . . —

последовательность точек области  $R_w$ , сходящаяся к  $\omega$ . Обозначим через  $z_1, z_2, \ldots$  соответствующие точки области  $R_z$ ; так как  $c_w$  есть кривая Jordan'а, последовательные точки  $w_1, w_2, \ldots$  можно соединить дугами кривых, образующими сечение  $\gamma_w$ , идущее от точки  $\omega$  внутрь области  $R_w$ . По § 135  $\gamma_w$  отображается на сечение  $\gamma_z$ , идущее от точки  $\zeta$  кривой  $c_z$  внутрь области  $R_z$ . Последовательность точек  $z_1, z_2, \ldots$ , лежащая на кривой  $\gamma_z$ , должна сходиться к точке  $\zeta$ . Таким образом сходимость  $\{z_n\}$  к точке  $\zeta$  есть непосредственное следствие сходимости  $\{w_n\}$  к точке  $\omega$ . Отсюда следует, что  $\zeta$  зависит только от точки  $\omega$ , но не от выбора последовательности  $\{w_n\}$ . Каждой точке  $\omega$  соответствует единственная точка  $\zeta$ , и, так как роли областей  $R_z$  и  $R_w$  могут быть переменены, каждой точке  $\zeta$  кривой  $c_z$  соответствует единственная точка  $\omega$  кривой  $\omega$ 

Легко убедиться, что двум различным точкам  $\omega_1$  и  $\omega_2$  Траницы  $c_{\infty}$  соответствуют различные точки  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  границы  $c_{\infty}$ . (Это

следует также из § 136.)

Отображение границы одной области на другую непрерывно. В самом деле, пусть  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , ...— точки  $c_w$ , сходящиеся к  $\omega_0$ , а  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ , ...— соответствующие точки  $c_s$ . Каково бы ни былом положительное число k, в области  $R_w$  можно подобрать точку  $w_k$  так, чтобы одновременно удовлетворялись два неравенства

$$|z_k-\zeta_k|<\frac{1}{k}\,,\quad |w_k-\widetilde{\omega}_k|<\frac{1}{k}\,.$$

Точки  $w_1, w_2, \dots$  сходятся к  $\omega_1$ , поэтому  $z_1, z_2, \dots$ , а сле-

довательно, и С, С2, ... сходятся к Со.

Наконец, пусть  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  — три точки  $c_w$ , расположенные в порядке, соответствующем положительному направлению обхода кривой  $c_w$ . Построим в области  $R_w$  три сечения, идущие из точки  $O_w$  к точкам  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  и не имеющие точек пересечения, отличных от  $O_w$ .

Переходя к рассмотрению соответствующей фигуры на z-плоскости, заметим, что отображение конформно в точке  $O_w$ . Отсюда ясно, что точки  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  и  $\zeta_3$  расположены на  $c_z$  в порядке, соответствующем положительному обходу. Полученные результаты

суммируются в следующей теореме:

Теорема 3: При конформном отображении одной жордановой области на другую соответствие взаимно однозначно и непрерывно во всей замкнутой области и соответствующие точки описывают границы областей в одном и том же направлении, 138. Легко установить небольшое обобщение полученной теоремы. Пусть  $R_w$  область, а  $c_w$  дуга Jordan'а (непрерывная всюду за исключением, может быть, концов), удовлетворяющая следующим условиям: а) каждая точка  $\omega$  дуги  $c_w$  принадлежит границе области  $R_w$ , b) каждую точку  $\omega$  дуги  $c_w$  можно соединить с любой внутренней точкой  $O_w$  сечением, лежащим внутри  $R_w$ , c) всякая жорданова область, ограниченная отрезком  $\omega_1\omega_2$  жордановой дуги  $c_w$  и внутренними сечениями  $O_w\omega_1$  и  $O_w\omega_2$ , содержится в области  $R_w$ . В этом случае мы скажем, что граница области  $R_w$  содержит открытую дугу Jordan'а  $c_w$ .

Предположим, что  $\omega_1 = \omega_2$ . По § 136 сечения  $O_w \omega_1$ ,  $O_w \omega_2$ 

отображаются на сечения  $O_{z}\zeta_{1}$ ,  $O_{z}\zeta_{2}$ , причем  $\zeta_{1} \pm \zeta_{3}$ .

Преобразование w=f(z) отображает внутренность жордановой области  $O_z\zeta_1\zeta_2O_z$  на внутренность жордановой области  $O_w\omega_1\omega_2O_w$ . По § 137 участок  $\omega_1\omega_2$  открытой жордановой дуги  $c_w$  и, следовательно, вся кривая отображаются взаимно однозначно и непрерывно на дугу границы  $c_z$  области  $R_z$ .

Методом § 136 можно показать, что  $c_w$  только тогда есть изображение всей границы  $R_z$ , когда  $c_w$  совпадает с полной гра-

ницей  $R_w$ , т. е. когда  $R_w$  есть область Jordan'a.

139. Инверсия относительно аналитической кривой. Действительная аналитическая кривая плоскости ху дается или уравнением

$$F(x, y) = 0, (139,1)$$

или, в параметрической форме, двумя уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$
 (139,2)

где F(x,y),  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  — функции, разлагающиеся в степенной ряд с действительными коэфициентами в окрестности каждой точки кривой. Предположим далее, что во всякой такой точке по крайней мере одна из частных производных  $F_x$ ,  $F_y$  и по крайней мере одна из производных  $\varphi'(t)$ ,  $\psi'(t)$  отлична от нуля.

Функция

$$z = f(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$$
 (139,3)

есть голоморфная функция комплексного переменного t в окрестности точки  $t_0$  действительной оси. По предположению  $f'(t_0) \neq 0$ , поэтому при достаточно малом r преобразование (139,3) дает конформное отображение круга  $|t-t_0| \leqslant r$  на окрестность точки  $z_0 = f(t_0)$ . При этом диаметр круга, направленный по действительной оси, преобразуется в дугу кривой (139,2). Следующее

определение принадлежит Schwarz'y: точка  $z^*$  называется инверсией z относительно аналитической кривой (139,2), если z и  $z^*$  изображаются в круге  $|t-t_0| \le r$  двумя сопряженными точками t и t. Инверсия точки (139,3) дается равенством

$$z^* = \varphi(\overline{t}) + i\psi(\overline{t}). \tag{139,4}$$

Обозначим через w комплексное число, сопряженное с  $z^*$ . Так как  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  разлагаются в степенные ряды с действительными коэфициентами, величины  $\varphi(\overline{t})$  и  $\varphi(t)$ ,  $\psi(\overline{t})$  и  $\psi(t)$  сопряжены между собой. Отсюда

$$w = \bar{z}^* = \varphi(t) - i\psi(t),$$
 (139,5)

из (139,3) и (139,5) следует

$$x = \varphi(t) = \frac{z+w}{2}, \ y = \psi(t) = \frac{z-w}{2i}.$$
 (139,6)

Подстановка этих значений в (139,1) приводит к соотношению

$$F\left(\frac{z+w}{2}, \frac{z-w}{2i}\right) = 0, \tag{139,7}$$

из которого w выражается как аналитическая функция z. Уравнение (139,7), между прочим, показывает, что операция инверсии зависит только от формы аналитической кривой (139,1), но не зависит от выбора параметра t в (139,2) (24).

140. Уравнение (139,7) особенно удобно в случае алгебраических кривых. Если (139,1) изображает прямую линию или круг, уравнение (139,7) совпадает с формулами для инверсии, данными в главе I. В случае эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{140,1}$$

(139,7) дает:

$$(a^2 - b^2)(w^2 + z^2) - 2(a^2 + b^2)zw + 4a^2b^2 = 0. (140,2)$$

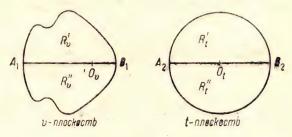
Разрешая это уравнение относительно w, выразим w как двузначную функцию z, регулярную во всякой точке z-плоскости, отличной от фокусов эллипса (140,1). Соответствующее преобразование

$$(a^2 - b^2)(z^{*2} + \overline{z^2}) - 2(a^2 + b^2)z^{*2} + 4a^2b^2 = 0 \quad (140,3)$$

только тогда может быть рассматриваемо как инверсия относительно эллипса, когда обе точки лежат внутри софокусного (140,1) эллипса, проходящего через точку

$$x_1 = \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \ y_1 = 0.$$

141. Принцип симметрии. Пусть  $R_v$  односвязная область, симметричная относительно действительной оси и содержащая ее отрезок  $A_1B_1$ . Предположим, что функция  $v=\psi(t)$  дает конформное отображение области  $R_v$  на единичный круг t-плоскости и



Фиг. 30.

переводит точку t=0 в точку  $O_v$  отрезка  $A_1B_1$ , причем  $\psi'(0)>0$ . Этими условиями функция  $\psi(t)$  определяется однозначно (§ 112). Обе рассматриваемые фигуры при инверсии относительно отрезков  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  отображаются сами на себя.

Отсюда следует:

$$\overline{\psi}(\overline{t}) = \psi(t), \tag{141,1}$$

где  $\psi$  и t — величины, сопряженные с  $\psi$  и t. Соотношение (141,1) показывает, чго  $\psi(t)$  разлагается в степенной ряд с действительными коэфициентами, поэтому отрезки  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  отображаются друг на друга, и, следовательно, области  $R_v'$  и  $R_t'$  также соответствуют друг другу.

142. Чтобы получить конформное отображение области  $R_v'$  на единичный круг |z| < 1, мы воспользуемся функцией  $v = \psi(t)$ , отображающей  $R_v'$  на  $R_t'$ , и функцией  $t = \varphi(z)$ , отображающей

 $R'_t$  на круг |z| < 1.

Функция  $\varphi(z)$  известна из § 54; она отображает круг |t| < 1 на z-плоскость, рассеченную вдоль дуги окружности |z| = 1. При этом отображении две симметричные точки  $z_1$  и  $z_2$  отно-

сительно |z|=1 переходят в точки, симметричные относительно действительной оси плоскости t.

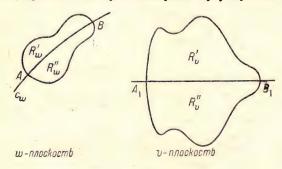
Преобразование  $v=\psi(\varphi(z))$  отображает |z|<1 на  $R_v'$  и переводит точки  $z_1$  и  $z_2$  в точки  $v_1$  и  $v_2$ , симметричные относительно отрезка  $A_1B_1$ . Отрезок  $A_1B_1$  отображается на дугу круга |z|=1, причем функция  $\psi(\varphi(z))$  голоморфна вдоль этой дуги.

143. Пусть  $c_w$  — регулярная аналитическая кривая, переходя-

щая при преобразовании

$$w = \chi(v) \tag{143,1}$$

в отрезок действительной оси v-плоскости. Пусть область  $R_w'$ , w-плоскости, граница которой содержит дугу кривой  $c_w$ , отоб-



Фиг. 31.

ражается преобразованием (143,1) на некоторую область  $R_v'$ , а область  $R_w''$ , симметричная с  $R_w'$  относительно  $c_w$ , отображается тем же преобразованием (143,1) на область  $R_v'$ , симметричную с  $R_v'$ .

Чтобы найти конформное отображение  $R'_w$  на круг |z| < 1, достаточно в уравнение (1,431) подставить функцию  $v = \psi(\varphi(z))$  (§ 142). Полученное преобразование

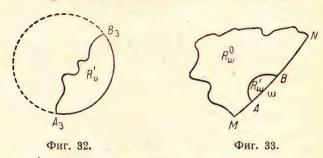
$$w = f(z) \tag{143,2}$$

обладает следующими свойствами: дуга AB аналитической кривой  $c_w$ , входящая в состав границы  $R_w'$ , соответствует дуге окружности |z|=1, на которой функция f(z) голоморфна; если  $z_1$  и  $z_2$ — симметричные точки относительно |z|=1, им соответствуют точки  $w_1$  и  $w_2$ , симметричные относительно кривой  $e_w$ , одна из которых попадает в  $R_w'$ , а другая в  $R_w''$ .

144. Пусть  $R'_w$  — только что рассмотренная область, а  $R'_v$  — область, лежащая внутри некоторого круга, граница которой содержит дугу этого круга  $A_3B_3$ . Предположим, что функция w=F(v) дает конформное отображение  $R'_v$  на  $R'_w$  и переводит дугу круга  $A_3B_3$  на дугу AB кривой  $c_w$ . Тогда F(v) обладает на дуге  $A_3B_3$  точно теми же свойствами, которые были указаны для f(z) в § 143. В самом деле, F(v) получается исключением z из уравнения w=f(z) и уравнения v=g(z), дающего отображение  $R'_v$  на |z|<1. Пусть теперь  $R^0_w$  — произвольная односвязная область, граница которой содержит дугу MN некоторой аналитической кривой  $c_w$ , и

$$w = F(v) \tag{144,1}$$

отображает  $R_{so}^0$  на круг |v| < 1. В общем случае нельзя по-



строить инверсию всей области  $R_{w}^{0}$  относительно  $c_{w}$ , и, следо-

вательно, метод § 143 неприменим.

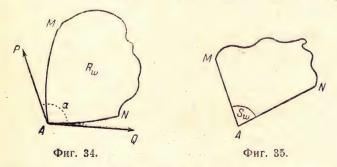
Однако мы знаем (§ 138), что дуга MN отображается взаимно однозначно и непрерывно на дугу окружности |v|=1. Пусть  $\omega$  — произвольная точка MN. Тогда можно построить область  $R'_w$ , содержащуюся в  $R^0_w$  и примыкающую к дуге AB кривой  $c_w$ , содержащей точку  $\omega$ , инверсия которой относительно  $c_w$  существует. Функция (144,1) отображает  $R'_w$  на область  $R'_v$ . обладающую свойствами, указанными в начале этого параграфа. Отсюда следует, что F(v) голоморфна во всех точках дуги круга |v|=1, соответствующей линии  $c_w$ . Далее, если окрестность внутренней точки этой дуги достаточно мала, двум ее симметричным точкам соответствуют точки, симметричные относительно  $c_w$ . Полученные результаты составляют знаменитый принцип симметрии, или принцип инверсий, носящий имя Schwarz'а.

145. Пусть R — произвольная односвязная область, граница которой содержит больше одной точки. Предположим, что функция

$$w = f(z) \tag{145,1}$$

дает конформное отображение круга |z| < 1 на область R. Следуя главе II, мы будем рассматривать круг как неевклидову плоскость. При инверсии относительно одной из неевклидовых прямых круг |z| < 1 отображается на себя. Аналитическая кривая w-плоскости, соответствующая неевклидовой прямой, разбивает область R на две: R' и R'', отображающиеся друг на друга при инверсии относительно этой кривой. Поэтому такие кривые могут быть рассматриваемы как линии симметрии области R.

146. Поведение отображения в углах. Пусть  $R_{ip}$  — область, граница которой содержит дугу MN кривой Jordan'а. Предпо-



ложим, что в одной из внутренних точек A дуги MN существуют касательные к участкам кривой AM и AN. Назовем эти касательные соответственно AP и AQ. В этом случае область  $R_w$  имеет угол в точке A, и величина его измеряется углом  $\alpha$ 

между направлениями AP' и AQ.

При конформном отображении  $R_w$  на круг |z| < 1 точка A соответствует некоторой точке  $A_1$  окружности |z| = 1. Мы докажем, что всякой кривой области  $R_w$ , оканчивающейся в точке A и имеющей в этой точке касательную, составляющую с направлением AQ угол  $\theta\alpha$  ( $0 < \theta < 1$ ), на плоскости z соответствует кривая, имеющая в точке  $A_1$  касательную, составляющую угол  $\theta\pi$  с дугой круга  $A_1N_1$ . Это легко доказать, когда AM и AN суть отрезки прямых линий.

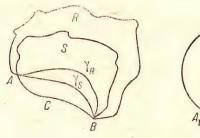
Высечем из угла MAN круговой сектор  $S_w$ , лежащий в области  $R_w$ . Функция  $z = \varphi(w)$ , отображающая  $R_w$  на |z| < 1,

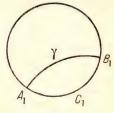
отображает  $S_m$  на участок круга  $S_a$ , примыкающий к точке  $A_1$ . Надо показать, что соответствующие углы в точках A и  $A_1$ пропорциональны.

Если  $w_0$  аффикс точки A, преобразование  $u=(w-w_0)^{\frac{\pi}{\alpha}}$ отображает  $S_w$  на полукруг  $S_u$ . При этом отображении, очевидно, соблюдается пропорциональность углов; функция, дающая отображение  $S_u$  на  $S_z$ , голоморфна при u = 0, и, следовательно, преобразование конформно в этой точке. Отсюда следует пропорциональность углов для отображения  $S_w$  на  $S_z$ .

147. Доказательство общей теоремы основывается на сле-

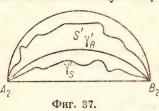
дующей лемме.





Фиг. 36.

Пусть область R содержит область S, и границы обеих областей имеют общую жорданову дугу АСВ. Отобразим каждую



из этих областей на внутренность круга K так, чтобы концы A и Bжордановой дуги АСВ в обоих случаях соответствовали двум фиксированным точкам окружности  $A_1$  и  $B_1$ . Пусть теперь  $\gamma$  — дуга круга, лежащая внутри K и соединяющая  $A_1$ и  $B_1$ , а  $\gamma_R$  и  $\gamma_S$  — ее отображения.

М: покажем, что у попадает в область, ограниченную дугами

ACB H YR.

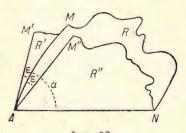
При конформном отображении К на полукруг, переводящем дугу  $A_1C_1B_1$  в диаметр полукруга  $A_2B_2$ ,  $\gamma$  переходит в дугу круга, проходящую через точки  $A_2$  и  $B_2$ . Мы предположим, что диаметр  $A_2B_2$  расположен на действительной оси. Из сказанного следует, что конформное преобразование, отображающее R на полукруг и переводящее жорданову дугу АСВ в диаметр, отображает  $\gamma_R$  на дугу круга, проходящую через  $A_2$  и  $B_2$ . Это преобразование отображает S на область S', лежащую внутри полукруга, и  $\gamma_S$  в кривую  $\gamma_S'$ , соединяющую  $A_2$  с  $B_2$ . Нам надо показать, что  $\gamma_S'$  заключена между  $\gamma_R'$  и  $A_2B_2$ . Кривая  $\gamma_S'^*$  может быть рассматриваема как образ дуги  $\gamma_R'$  при конформном отображении полукруга на S', переводящем диаметр  $A_2B_2$  в самого себя. Применяя принцип симметрии, убеждаемся, что функция, реализующая отображение, голоморфна в круге, построенном на диаметре  $A_2B_2$ . Эта функция принимает действительные значения на  $A_2B_2$ . Из теоремы § 88 непосредственно следует, что  $\gamma_S'$  лежит между  $\gamma_R'$  и  $A_2B_2$ .

148. Теперь мы имеем возможность доказать теорему § 146 в случае, когда одна из сторон угла A, например AN, есть прямая линия.

Пусть попрежнему  $\alpha$  есть величина угла A.

Построим две новые области R' и R''. Область R' содержит R и в состав ее границы входят AN и отрезок AM',

составляющий угол  $\alpha + \epsilon$  с AN. R'' содержится в R, и в состав ее границы входят AN и отрезок AM'', составляющий угол  $\alpha - \epsilon$  с AN. Рассмотрим три функции отображающие облусти R, R' и R'' на фиксированный круг и переводящие AN в одну и ту же дугу окружности  $A_1N_1$ . Пусть  $\gamma_0$  — дуга окружности, соединяющая точки  $A_1$  и  $N_1$ , лежащая внутри



Фиг. 38.

круга и составляющая угол  $\pi\theta$  с дугой  $A_1N_1$ . Рассмотрим изображения этой дуги  $\gamma$ ,  $\gamma'$  и  $\gamma''$  в областях R, R', R''. По § 147  $\gamma$  лежит между  $\gamma'$  и  $\gamma''$ , а по § 146 кривые  $\gamma'$  и  $\gamma''$  имеют касательные в точке A и эти касательные составляют углы  $\theta$  ( $\alpha$  +  $\epsilon$ ) и  $\theta$  ( $\alpha$  —  $\epsilon$ ) с отрезком AN.

Так как є произвольно, и  $\gamma$  заключено между  $\gamma'$  и  $\gamma''$ , кривая  $\gamma$  имеет касательную в точке A, составляющую угол  $0\alpha$  с AN; в самом деле, принимая обратное предположение, легко получить противоречие.

Таким образом теорема § 146 доказана в случае, когда одна из сторон угла есть прямая.

149. Доказательство теоремы § 146 в общем случае может быть основано на полученном результате. Пусть область R

имеет угол A. Рассмотрим область R', содержащую R и имеющую в точке A угол, ограниченный дугой AM и отрезком прямой линии AK. Отобразим R' на полуплоскость; тогда R перейдет в область  $R_1$ , имеющую угол в точке  $A_1$ . Сторона



Фиг. 39.

угла  $A_1M_1$ , соответствующая AM, прямолинейна. Как показано в § 148, при отображении R на  $R_1$ , а также  $R_1$  на круг углы с вершиной в точке A изменяются в постоянном отношении.

150. В частности, если граница области R имеет касательную в точке A, угол в этой точке равен  $\pi$ , и, следовательно, отображение обладает консерватизмом углов. Пусть f(z) — отображающая функция, а  $\zeta$  — точка окружности, соответствующая A; аналитически свойство изогональности выражается стремлением

$$\arg \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \tag{150,1}$$

к константе при приближении точки z к  $\zeta$ . Lindelöf'ом было дано аналитическое доказательство изогональности в точке A, использующее (150,1) и интеграл Poisson'а (23).

Кроме того, Lindelöf показал, что, если кривая MAN гладкая в точке A, функция arg f'(z) непрерывна в точке  $\zeta$ . (Кривая называется гладкой в точке A, если в этой точке существует касательная, и хорда BC стремится к этой касательной, когда B и C приближаются к  $A^1$ ).

Следует заметить, что даже в случае, рассмотренном Lindelöf'ом, f'(z) может не иметь конечного предела в точке  $\zeta$ . Например, функция

$$w = -z \ln z, \tag{150,2}$$

где  $z=re^{i\varphi}$ , отображает область, ограниченную мнимой осью  $\Re\left(z\right)=0$  и кривой

$$\ln r = -\varphi \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ if } -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0\right),$$

на область, получающуюся из внутренности выпуклой кривой

$$w = \frac{\pi}{2} r \mp i r \ln r \quad (0 < r \le 1)$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Если f(0) = 0,  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ , кривая y = f(x) имеет каса́тельную y = 0 при x = 0, но не гладкая в этой точке.

удалением отрезка действительной оси, заключенного между точками  $w=\frac{1}{e}$  и  $w=\frac{\pi}{2}$ . Производная функции (150,2)

$$w' = -(1 + \ln z) \tag{150,3}$$

стремится к бесконечности при z, стремящемся к нулю; между тем arg w' стремится к нулю.

151. Дополненная теорема § 93 во многих случаях приводит

к более точному результату, чем предыдущий.

Пусть функция f(z) голоморфна и удовлетворяет неравенству |f(z)| < 1 в круге |z| < 1. Рассмотрим f(z) внутри треугольника ABC, где A совпадает с точкой z=1, а BC — перпендикуляр к действительной оси, лежащий внутри единичного круга и отстоящий на расстоянии h от A.

Для всякой точки, лежащей внутри треугольника, удовлетворяется неравенство

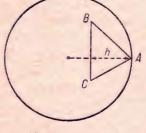
$$|1-z| < M(1-|z|), (151,1)$$

где M — положительная константа, и поэтому

$$\frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} < M \frac{|1 - f(z)|}{|1 - z|}. \quad (151,2)$$

Отсюда или отношение

$$\frac{1-f(z)}{1-z}$$



Фиг. 40.

равномерно стремится к бесконечности, когда z приближается к A, оставаясь внутри треугольника ABC, или внутри треугольника существует последовательность точек  $z_1, z_2, \ldots$ , для которой отношение  $\left|\frac{1-f(z)}{1-z}\right|$  и, следовательно, по (151,2)

$$\frac{1-|f(z_n)|}{1-|z_n|}$$

остается ограниченным; во втором случае применима теорема § 93. Пусть  $z_1, z_2, \ldots$  последовательность точек, лежащих в ABC и сходящихся к z=1. Определим две последовательности чисел  $r_1, r_2, \ldots$  и  $\rho_1, \rho_2, \ldots$  соотношениями

$$r_n = \frac{1 - \Re(z_n)}{h}, \quad \rho_n = \frac{\alpha r_n}{1 - r_n(1 - \alpha)},$$
 (151,3)

где а дается равенством (93,10). Пусть, далее

$$1 - z = r_n(1 - t), (151,4)$$

$$1 - f(z) = \rho_n [1 - \varphi_n(t)]. \tag{151,5}$$

Функции  $\varphi_n(t)$  голоморфны при |t| < 1 и по теореме Julia удовлетворяют внутри круга неравенствам  $|\varphi_n(t)| < 1$  ( $n=1,2,\ldots$ ). По (151,4) при z действительном t действительно. При фиксированном t,  $z \to 1$ , если  $n \to \infty$ . Из (93,10) и (151,3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\varphi_n(t)}{1-t}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-f(z)}{1-z}\frac{r_n}{\rho_n}=1.$$

Поэтому при действительных значениях t функции  $\varphi_n(t)$  удовлетворяют соотношению

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = t. \tag{151,6}$$

Но эти функции образуют нормальное семейство. Отсюда следует, что (151,6) выполняется равномерно во всяком замкнутом множестве точек, лежащем внутри |t| < 1.

Рассмотрим теперь исходную последовательность  $z_1$ ,  $z_2$ ,... и определим последовательность  $t_1$ ,  $t_2$ ,..., полагая

$$1 - z_n = r_n(1 - t_n) \quad (n = 1, 2, ...); \tag{151,7}$$

равенство (151,3) показывает, что точки  $t_1$ ,  $t_2$ ,... лежат на основании BC треугольника ABC. Отсюда  $\varphi_n(t_n)=t_n+\tau_n$ , где  $\tau_n\to 0$ , так как BC есть замкнутое множество точек, лежащее внутри единичного круга.

Соотношения (151,4) и (151,5) дают

$$\frac{1-f(z_n)}{1-z_n}=\frac{\rho_n}{r_n}\left(1+\frac{\tau_n}{1-t_n}\right),$$

и потому

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - f(z_n)}{1 - z_n} = \alpha. \tag{151,8}$$

В заключение заметим, что из нормальности  $\{\varphi_n(t)\}$  следует, что семейство  $\{\varphi_n'(t)\}$  также нормально, и, следовательно,  $\lim_{n\to\infty}\varphi_n'(t)=1$ . Диференцируя (151,5) по t и принимая во внимание (151,4), получаем  $r_nf'(z_n)=\rho_n\varphi_n'(t_n)$ . Отсюда

$$\lim_{n \to \infty} f'(z_n) = \alpha. \tag{151,9}$$

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 4: Если функция f(z) голоморфна и удовлетворяет неравенству |f(z)| < 1 в круге |z| < 1, а  $z_1, z_2, \ldots$  последова-

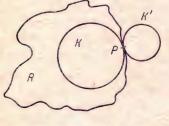
mельность точек, лежащих внутри треугольника ABC и cходящихся k z = 1, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-f(z_n)}{1-z_n}$$

существует. Этот предел или бесконечен или равен положительному числу а, и тогда

$$\lim_{n\to\infty}f'(z_n)=\alpha.$$

152. Конформное отображение на границе. Пусть R — односвязная область, а P — ее граничная точка, через которую





Фиг. 41. Фиг. 42.

можно провести два круга K и K'; K', лежащий целиком вне, и K— целиком внутри области R. Совершим конформное преобразование R на внутренность круга |z| < 1. Мы покажем, что на окружности |z| = 1 существует точка A, при приближении K которой точки Z внутри треугольника ABC с основанием BC, лежащим внутри круга, соответствующая точка f(z) области R приближается K P, а производная f'(z) стремится K определенному, конечному и отличному от нуля пределу. Поэтому возможно говорить о конформном отображении в точках границы.

Отобразим конформно преобразованием Möbius'а внутренность круга K' на внешность единичного круга |w|=1 так, чтобы точка P перешла в w=1. Тогда R преобразуется в область  $R_1$ , лежащую внутри круга |w|<1, а круг K в круг  $K_1$  с центром  $C_1$ , содержащимся в  $R_1$ . Нам надо показать, что, если функция f(z), дающая отображение, подобрана соответственным образом, число  $\alpha$  § 151 конечно. Рассмотрим преобразование w=f(z), переводящее точку z=0 в центр круга  $K_1$ , и обозначим радпус этого круга через  $\rho_1$ .

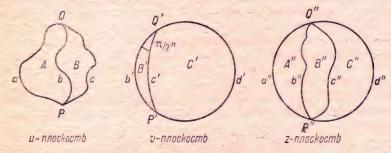
По лемме Schwarz'а окружность  $|z|=\theta$   $(0<\theta<1)$  отображается на кривую, окружающую круг  $|w-(1-\rho_1)|=\rho_1\theta$ . На этой кривой существует по крайней мере одна точка  $w_1'$ , лежащая на действительной оси и удовлетворяющая неравенству  $1-w_1'<\rho_1(1-\theta)$ . Если z'— точка, соответствующая w', то  $1-|w'|/(1-|z'|)<\rho_1$ . Мы можем построить последова-(ельность точек  $z_1, z_2, \ldots$ , сходящуюся к точке  $\zeta$  окружности |z|=1, так, чтобы соответствующие точки  $w_n$  удовлетворяли неравенствам  $(1-|w_n|)/(1-|z_n|)<\rho_1$ . Наконец, поворотом единичного круга можно достигнуть  $\zeta=1$ . Теперь удовлетворяются все условия теоремы § 93 и 151 и очевидно, что  $\alpha \leqslant \rho_1$ . 153. Надо обратить внимание на то, что преобразование может быть конформным в граничной точке P, в окрестности

пожет быть конформным в граничной точке P, в окрестности которой граница не совпадает с жордановой дугой. Рассмотрим, например, единичный круг и в нем дуги окружностей, соединяющие точки — 1 и + 1 и составляющие в этих точках с действительной осью углы  $\pm \frac{\pi}{2} \frac{n-1}{n}$   $(n=1,2,\ldots)$ . Удалим из круга отрезки этих дуг, заключенные между w=-1 и первой точкой пересечения дуги с окружностью  $|w-(1-\rho_1)|=\rho_1$ . К полученной области применима наша теорема. Функция f(z), рассматриваемая во всем круге |z| < 1, даже не непрерывна при z=1. Между тем внутри каждого угла с вершиной в точке z=1, составленного хордами круга, f(z) и f'(z) непрерывны и ограничены (25) (26).

#### ГЛАВА VII

#### ОТОБРАЖЕНИЕ ЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

154. Пусть a, b и c — три жордановых дуги u-плоскости, соединяющие точки P и Q и не имеющие других точек пересечения. Эти дуги определяют три жордановых области A, B и (A+B). Пусть на v-плоскости три дуги круга b', c', d' определяют две луночки B' и C', сумма которых (B'+C') есть круг, ограниченный окружностью, составленной из дуг b' и d'; далее,



Фиг. 43.

угол, образуемый b' и c', равен  $\frac{\pi}{2^n}$ , где n — целое положительное число. Предположим, что известна функция  $u = \psi(v)$ , отображающая B' на B и переводящая b в b' и c в c'. Мы покажем, что можно найти две функции z = f(u) и z = g(v), первая из которых отображает (A + B) на область (A'' + B''), а вторая отображает (B'+C') на (B''+C''), причем (A''+B''+C'') есть круг; преобразования таковы, что A переходит в A'', C в C'', а B и B' в B''; какова бы ни была точка области B'', соответствующие точки на и- и υ-плоскостях связаны соотношением  $u = \psi(v)$ . Рассмотрим прежде всего функцию  $u_1 = \varphi_1(u)$ , отображающую (A + B) на внутренность круга  $|u_1| < 1$  и переводящую одну из точек, лежащих в области А, в начало координат u = 0. Пусть при этом областям A и B соответствуют  $A_1$  и  $B_1$ . Граница  $B_1$  состоит из жордановой кривой  $b_1$  и дуги круга  $c_1$ . Функция  $u_1 = \varphi_1[\psi(v)] = \psi_1(v)$  отображает область B'на  $B_1$ , при этом дуги кругов c' и  $c_1$  соответствуют друг другу. Из принципа симметрии следует, что  $\psi_1(v)$  определена не только в области B', но и в круговой луночке, имеющей углы  $\frac{\pi}{2^{n-1}}$  в точках P' и Q'. Функция отображает эту луночку на область, составленную из  $B_1$  и её инверсии  $\overline{B_1}$  относительно  $c_1$ . Таким образом решение нашей задачи сводится к аналогичной задаче, в которой вместо областей A и B мы имеем области  $A_1$  и  $(B_1 + \overline{B_1})$  и вместо B' и C' круговую луночку с углом  $\frac{\pi}{2^{n-1}}$  и ее дополнение до круга, и, следовательно, число n понижено на единицу.

Продолжая этот процесс, мы получим последовательно функции  $u_2 = \varphi_2(u_1)$ ,  $u_3 = \varphi_3(u_2)$ , ...,  $z = u_n = \varphi_n(u_{n-1})$ ; отсюда вычислим z в функции u, z = f(u). Очевидно, что  $g(v) = f[\psi(v)]$ .

155. В формулировке доказанного предложения специальные области B' и C' могут быть заменены более общими. Достаточно предположить, что граница B' и C' состоит из трех дуг Jordan'а, соединяющих точки P' и Q', имеющих в этих точках различные касательные. Пусть  $v = \chi\left(w\right)$  — функция, отображающая |w| < 1 на (B' + C'). Это отображение переводит B' в область, ограниченную дугой круга  $\beta'$  и дугой Jordan'а, встречающей  $\beta'$  в ее концах под углами, отличными от нуля. Отсюда следует, что полученная область содержит луночку  $\beta'\gamma'$  с углом  $\frac{\pi}{2^n}$ . Функция  $u = \psi\left[\chi(w)\right]$  отображает  $\gamma'$  на кривую  $\gamma$  u-плоскости; отсекая область, ограниченную  $\gamma$  и c, сведем решение нашей задачи к задаче, разобранной в § 154 [14].

156. Конформные отображения поверхностей. Пусть *S* поверхность в трехмерном пространстве *XYZ*, представляемая в некоторой окрестности параметрическими уравнениями

$$X = X(\alpha, \beta), Y = Y(\alpha, \beta), Z = Z(\alpha, \beta).$$
 (156,1)

Полагая в (156,1)  $\alpha=\alpha$  (u,v),  $\beta=\beta$  (u,v), получим представление той же поверхности в функции новых параметров u и v. Мы предположим, что можно подыскать функции  $\alpha=\alpha$  (u,v),  $\beta=\beta$  (u,v) так, чтобы новые функции, дающие поверхность S

$$X = \xi(u, v), \quad Y = \eta(u, v), \quad Z = \zeta(u, v), \quad (156,2)$$

имели непрерывные частные производные первого порядка в некоторой области  $R_w$  плоскости uv, и

$$ds^2 = \lambda \ (u, \ v) \ (du^2 + dv^2), \tag{156,3}$$

е  $\lambda \neq 0$  в области  $R_w$ . При этих условиях доказывается, что об-

ласть  $R_w$  отображается на участок  $R_{\mathcal{S}}$  поверхности  $\mathcal{S}$  взаимно однозначно и непрерывно, что двум кривым области  $R_w$ , с непрерывно вращающимися касательными и пересекающимся под углом  $\alpha$ , на  $R_{\mathcal{S}}$  соответствуют две кривые, пересекающиеся под тем же углом  $\alpha$ , и что при отображении растяжение в точке не зависит от направления. Другими словами, отображение  $R_w$  на  $R_{\mathcal{S}}$  конформно.

Известно, что всегда возможно подобрать параметры u и v, удовлетворяющие (156,3) в некоторой окрестности ( $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ) поверхности (156,1), если только в некоторой области  $\alpha\beta$ -плоскости функции  $X(\alpha, \beta)$ ,  $Y(\alpha, \beta)$  и  $Z(\alpha, \beta)$  имеют непрерывные частные производные, удовлетворяющие условию Lipschitz'а, и три якобиана

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(\alpha, \beta)}$$
,  $\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(\alpha, \beta)}$ ,  $\frac{\partial(Z, X)}{\partial(\alpha, \beta)}$ 

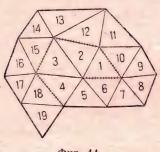
отличны от нуля в точке ( $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ). Понятно, что уравнение (156,3) может иногда удовлетворяться при соответственном выборе параметров, если даже приведенные условия не выполняются.

157. Конформное отображение замкнутой поверхности на сферу. Предположим, что поверхность S может быть отображена взаимно однозначно и непрерывно на сферу  $\Sigma$ . Пусть, далее, около каждой точки S существует окрестность, которую можно отобразить конформным преобразованием на участок плоскости. При этих условиях мы покажем, что всю поверхность S можно отобразить конформно на сферу  $\Sigma$ .

Рассмотрим произвольное взаимно однозначное преобразование S на  $\Sigma$ . Пусть верхний полюс  $N_1$  сферы  $\Sigma$  соответствует точке N поверхности S. Стереографическая проекция из точки  $N_1$  отображает сферу на плоскость T, поэтому существует взаимно однозначное и непрерывное соответствие между плоскостью T и поверхностью  $S^*$ , полученной удалением точки N из поверхности S.

158. Рассмотрим в плоскости T бесконечную последовательность треугольников  $T_1'$ ,  $T_2'$ ,..., расположенных в спиральном порядке (подобно кожуре очищенного яблока) и покрывающих всю плоскость T. Сумма  $\sigma_n' = T_1' + T_2' + \ldots + T_n'$ , n первых треугольников покрывает односвязную область. Прилагаемая фигура дает простой пример такой последовательности. Треугольники последовательности могут быть криволинейными; они начерчены прямолинейными только для удобства. Треугольники  $T_n'$ 

должны быть выбраны так, чтобы их изображения  $T_n$  на  $S^*$  удовлетворяли следующим двум условиям: а) стороны треугольни-



Фиг. 44.

ков должны иметь касательные в угловых точках, различные для двух различных сторон; b) два треугольника, имеющие общую сторону, могут быть отображены конформным преобразованием на плоскую область,

159. Мы покажем, что сумму  $\sigma_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$  при любом значении n можно отобразить конформным преобразованием на круг  $|z_n| < r_n$  комплексной  $z_n$ -плоскости. Предположим, что  $\sigma_{n-1}$  ото-

бражена на круг  $|z_{n-1}| < r_{n-1}$ , а  $T_{n-1} + T_n$  отображена на область v-плоскости. Треугольник  $T_{n-1}$  входит при обоих отображениях. Если поставим в соответствие образу точки треугольника  $T_{n-1}$  при одном отображении образ той же точки при другом отображении, полученное преобразование будет конформным. Это сводит задачу отображения  $\sigma_n$  на  $|z_n| < r_n$  к залаче, решенной в § 154, 155.

160. Огображение всей поверхности  $S^*$  сводится теперь к задаче, разобранной в § 125—129. Из полученных там результатов следует, что  $S^*$  может быть отображена либо на круг |w| < R, либо на всю w-плоскость. Мы покажем, что всегда осуществляется вторая возможность.

Отобразим конформно односвязную окрестность на поверхности S точки N на круг |u| < 1. Это возможно по предположению. Преобразование можно подобрать так, чтобы область 0 < |u| < 1 состояла из изображений точек  $S^*$ . Если  $\omega = \frac{1}{w}$ , функция  $\omega = \varphi(u)$ , переводящая точку u в точку  $\omega$ , соответствующую той же точке  $S^*$ , голоморфна и однозначна при 0 < |u| < 1;  $\varphi(u)$  ограничена в окрестности u = 0 и поэтому (§ 114) дает отображение круга с выколотым центром на область w-плоскости с выколотой бесконечно удаленной точкой. Но это возможно только в том случае, когда  $S^*$  отображена на полную w-плоскость.

Плоскость w есть стереографическая проекция сферы  $\Sigma$ , и это отображение конформно во всех точках сферы, включая

полюс. Это приводит к конформному отображению замкнутой поверхности S на сферу.

Отображение определяется однозначно заданием трех точек S,

соответствующих трем данным точкам сферы.

161. В качестве одного из первых приложений построенной теории надо указать на конформные отображения полиэдральных поверхностей на сферу.

Schwarz показал, что всякий тетраэдр и куб могут быть отображены конформно на сферу. Задача отображения наиболее общего замкнутого полиэдра на сферу почти тождественна с только что решенной. В этом случае мы не можем требовать сохранения углов на ребрах и в вершинах полиэдра, и для уточнения нашей задачи мы сделаем следующие соглашения относительно отображения окрестностей этих особых точек.

Вдоль каждого ребра пересекаются две грани. Развернем двугранный угол, образованный этими гранями, в плоскость. Это дает отображение окрестности точки ребра на плоскую

окрестность.

Если C вершина полиэдра, мы сделаем квази-конформное отображение C на плоскую область. Высечем окрестность C сферой малого радиуса с центром в C. Полученную таким образом пирамидальную фигуру разрежем вдоль одного ребра и развернем на плоскости u, помещая точку C в начало координат. Если сумма поверхностных углов полиэдра в точке C есть  $\pi \alpha$ ,

функция  $v=u^{\overline{\alpha}}$  отображает окрестность вершины C на плоский круг.

Метод, использованный в последних параграфах, приводит теперь к решению нашей задачи (28).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

#### I. Книги

### Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften:

L. Lichtenstein, Neuere Entwickelung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung, II, c. 3 (τ. II, 3, 1).

L. Bieberbach, Neuere Untersuchungen über Funktionen von kom-

plexen Variablen, II, c. 4 (r. II, 3, 1).

H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen, II.

G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 1, Livre II (ch. IV).

E. Picard, Traité d'Analyse, II.

G. Fubini, Introduzione alla Teoria dei Gruppi discontinui e delle Funzione Automorfe, Pisa, 1908.

G. Julia, Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel

isolé, 1923.

G. Julia, Principes géométriques d'Analyse, I, 1930.

J. L. Coolidge, Treatise on the Circle and the Sphere, Oxford 1915.

Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, 3-е изд., 1929.

H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, 2-е изд., 1922. P. Montel, Leçons sur les familles normales, Paris 1927.

### И. Заметки и статьи

1) J. L. Lagrange, Sur la construction des cartes géographiques, Oeuvres, IV, crp. 637—692, 1779.

2) C. F. Gauss, Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem abgebildeten in

den kleinsten Theilen ähnlich wird, Werke IV, crp. 189-216, 1822.

3) B. Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer complexen veränderlichen Grösse (Diss., Göttingen 1815), Werke, 2-е изд., стр. 3—41 (§ 21, стр. 39).

4) C. Carathéodory, Sui campi di Estremali uscenti da un punto e riempienti tutto lo spazio, Bollet. Unione matem. Italiana, Vol. II, 1923.

5) D. Hilbert, Das Dirichletsche Prinzip, Gött., Festschrift 1901.

6) H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen, II, p. 145; E. Picard, Traité d'Analyse, t. II, chap. X.

7) A. F. Möbius, Werke II, crp. 205-243.

8) F. Klein, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, Berlin, Springer, 1928.

9) H. Poincaré, Oeuvres, II.

10) P. Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen,

Diss., Gött., 1918.

11) Теорема о монодромности впервые была дана Weierstrass'ом. Доказательство, «оторое он давал в своих лекциях, можно найти в книге O. Stolz и J. Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie, Leipzig 1910.

12) P. Koebe, Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, Gött. Nachrichten, 1907 (статья представлена 12 апреля). См. особению стр. 13.

13) H. A. Schwarz, Zur Theorie der Abbildung, Gesammelte Abhand-

lungen, II, crp. 108 (oco60 § 1).

Доказательство, приведенное в тексте, принадлежит Erhard'y Schmidt'y. Оно было впервые опубликовано в статье C. Carathéodory, Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard, C. R., 26 Dec. 1905.

14) G. Pick, Über eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreis-

formiger Bereiche, Math. Ann. 77, p. 1, 1916.

15) Р. Коеве сделал предположение, что  $|f'(0)| \leq 4$ . Первое полное доказательство принадлежит G. Faber'y, Neuer Beweis eines Koebe-Biberbachschen Satzes über konforme Abbildung, Münch. Sitzungsber., Math-Phys. Klasse, S. 39, 1916. (Сравните Bieberbach, Enzyklopädie, 1. с., S. 511.)

16) G. Julia, Extension nouvelle d'un lemme de Schwarz, Acta Math.,

XLII, p. 349, 1918.

Обобщенная теорема, приведенная в тексте, дана J. Wolff'ом и опубликована в Comptes Rendus, 13 Septembre 1926. Теорема приведена здесь в том виде, в котором она была снова доказана автором этой книги, не знавшим работы Wolff'a, в статье "Über die Winkelderievierten von beschränkten analytischen Funktionen", Berl. Sitzungsber., Phys.-Math. Klasse, S. 39, 1929.

Относительно определения непрерывной сходимости мероморфных

функций см.:

17) A. Ostrowski, Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes. Math. Zeitschrift, 24 (1926), S. 215.

18) C. Carathéodory, Stetige Konvergenz und normale Familien von Funktionen, Math. Ann., 101, S. 515, 1929.

19) P. Montel, 1. c.

20) Fréchet, Les espaces abstraits, Paris 1928.

21) Для доказательства основной теоремы о конформных отображениях применялись три различные метода: принцип Dirichlet, методы, развитые теорией потенциала для решения граничных задач, и методы, заимствованные исключительно из теории функций. Доказательство, базирующееся на этом последнем методе, было дано позже всех и вытеснило все другие.

Исчерпывающее изложение истории вопроса до 1918 г. можно

найти в статье L. Lichtenstein'a в Enzyklopädie.

Доказательство, которое теперь стало общепринятым, было дано L. Fejér'ом и F. Riez'ом. Оно опубликовано T. Radó, Über die Fundamentalabbildung schlichter Gebiete, Acta Szeged. I, 1923.

Radó указал на то важное обстоятельство, что односвязность нигде

не входит в доказательство.

См. также интересную работу G. Faber, Über den Hauptsatz der konformen Abbildungen, Münch. Sitzungsber., Math.-Phys. Klasse, S. 91, 1922.

См. также M. P. Simonart, Sur les transformations ponctuelles et leurs applications géométriques. (2-e partie) la représentation conforme, Ann. de la Soc. Scient. de Bruxelles, 50, 1930; Memoires, p. 81.

22) Теория распространяется на последовательности римановых поверхностей; см. C. Carathéodory, Untersuchungen über die konformen Abbildungen fon festen und veränderlichen Gebieten, Math. Ann., 72, S. 107-144, 1912,

Приведенный вдесь метод есть упрощение доказательства, данного в 23) E. Lindelöf, Sur la représentation conforme d'une aire simplement connexe sur l'air d'un cercle, 4-e Congrès des mathém. Scandinaves à Stockholm, pp. 59-90, 1916 (см. особенно стр. 75-84). Упрощения явились следствием бесед с T. Radó.

Относительно обобщений см.

24) F. Lummer, Über die konforme Abbildung bizirkularer Kurven vierter Ordnung Diss., Leipzig 1920.

25) W. Seidel, Über die Ränderzuordnung bei konformen Abbildun-

gen, Math. Ann., 104, S. 182, 1931.

26) L. Ahlfors, Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, Acta Fennicae, A. I, № 9, 1930. 27) G. Darboux, 1. с. (гл. III).

28) Относительно приложений этой теоремы к проблеме Plateau см.: T. Radó, The problem of the least area and the problem of Plateau,

Math. Zeitschrift, 32, p. 763, 1930.

Методы, развитые нами в этой книге, могут быть приложены ко многим другим проблемам. Например, результаты § 125-130 и 157-159 могут быть применены к выводу общей теоремы униформизации (Uniformisierungssatz) Poincaré и Koebe: каждая односвязная по-верхность Riemann'а может быть отображена конформным преобразованием или на сферу, или на евклидову плоскость, или на внутреннюю область единичного круга. Следует заметить, что обычное доказательство может быть упрощено приемом, использованным в § 158, спирального подразделения поверхности.

В свою очередь § 131-136 содержат принцип, необходимый для изучения соответствия границ при отображении наиболее общих областей. Исчерпывающая литература дана в энциклопедической статье

L. Lichtenstein'a (§ 48).

Результаты § 120-123 о ядре последовательности областей могут быть обобщены на случай отображений 2*п*-мерных областей, осуществляемых системой п аналитических функций, п переменных.

29) C. Carathéodory, Über die Abbildungen die durch Systeme von analytischen Funktionen mit mehreren Veränderlichen erzeugt werden,

Math. Zeitschrift, 37, S. 758, 1932.

Существует обширная литература по отображениям многосвязных областей и поверхностей Riemann'a. (См. Lichtenstein, l. с., § 41, 44 и 45.)

#### примечания переводчика

[1] Группой преобразований называется совокупность преобразований, обладающая следующими свойствами:

а) Для каждого преобразования существует обратное, принадле-

жащее совокупности.

 Результат двух последовательных преобразований равносилен некоторому третьему преобразованию совокупности. Это преобразование называют произведением двух последовательных преобразований. Заметим, что произведение преобразований зависит от порядка сомножителей.

[2] Стереографическая проекция сферы на плоскость получается проектированием точек сферы лучами, выходящими из некоторой точки сферы А на плоскость, перпендикулярную к диаметру, проходящему через точку А. При таком преобразовании окружности на сфере переходят в окружности или прямые на плоскости и обратно. Кроме того, преобразование обладает консерватизмом углов (см., например, Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, ГТТИ, 1932, стр. 30).

🧗 Очевидно, что большие круги сферы переходят в круги, пересекающие диаметрально изображение экватора и, следовательно, семей-

ство этих кругов в эллиптическую связку.

[3] Две группы называются изоморфными, если между их элементами осуществлено взаимно однозначное соответствие, обладающее следующими свойствами:

а) Тождественному преобразованию первой группы соответствует

тождественное преобразование второй.

б) Произведению двух элементов первой группы соответствует

произведение соответствующих элементов второй группы.

Предложение, высказанное в тексте, следует из того, что всякое вращение сферы эквивалентно двум отражениям относительно плоскостей больших кругов.

[4] Относительно понятия поверхности Riemann а см. курсы теории функций, например Курант, Геометрическая теория функций, ГТТИ,

1934.

[5] Отображение внутренности или внешности произвольного многоугольника (и в частности прямоугольника) на внутренность круга достигается при помощи формулы Schwarz'a-Christoffel'я. См. Привалов, 1. с. или Курант, 1. с.

[6] Известно, что из всякой ограниченной последовательности чисел можно выбрать сходящуюся подпоследовательно ть. Поэтому из последовательности  $f_n(z_1)$  можно выбрать сходящуюся подпоследователь-

ность:

$$f_{n_1^1}(z_1), f_{n_2^1}(z_1) \dots f_{n_m^1}(z_1), \dots$$

из  $f_{n_m}^{-1}(z_2)$  сходящуюся подпоследовательность

$$f_{n_1^2}(z_2), f_{n_2^2}(z_2), \ldots f_{n_m^2}(z_2).$$

Вообще, из последовательности  $f_{n_m^{k-1}}(z_k)$ , можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$$f_{n_1^k}(z_k), \quad f_{n_2^k}(z_k), \ldots f_{n_m^k}(z_k), \ldots$$

Положим  $f_{n_m}(z) = f_{n_m}(z)$ . Подпоследовательность

$$f_{n_1}(z), f_{n_2}(z), \dots f_{n_m}(z), \dots$$

сходится во всех точках множества  $z_1, z_2, \ldots$ , так как начиная с некоторого m (зависящего от k), функции  $f_{n_m}(z)$  принадлежат к последовательности  $f_{n_m}(z)$ .

[7] Пусть  $f_n(z)$  последовательность непрерывных функций, сходящаяся равномерно на замкнутом множестве  $\gamma$ , а  $z_1$ ,  $z_2$ ,... последовательность точек этого множества, сходящаяся к  $z_0 \cdot f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z)$ , не-

прерывна, поэтому существует число N такое, что при n>N

$$|f_n(z)-f(z)|<\frac{\varepsilon}{2}, |f(z_0)-f(z_n)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

следовательно,

$$|f_n(z_n)-f(z_0)|<\varepsilon,$$

т. е. последовательность сходится непрерывно в точке  $z_0$ .

Обратно, пусть  $f_n(z)$  сходятся непрерывно. Если  $f_n(z)$  не сходятся равномерно, то существует последовательность точек  $z_n$ , сходящаяся к  $z_0$ , и две последовательности чисел  $p_n$  и  $q_n$ , стремящиеся к бесконечности и число  $\varepsilon$ , такие, что

$$|f_{p_n}(z_n) - f_{q_n}(z_n)| > \varepsilon$$

это противоречит непрерывной сходимости в точке 20.

[8] В самом деле, пусть  $z_0$  точка расходимости последовательности. Из чисел  $f_n(z_0)$  можно извлечь подпоследовательности  $f_{n_k}(z_0)$  и  $f_{n_i}(z_0)$  с различными пределами.  $f_{n_k}(z)$  и  $f_{n_i}(z)$  содержат подпоследовательности, сходящиеся к различным аналитическим функциям.

[9] В самом деле, пусть  $\gamma$  изображение на плоскости z пути, идущего от n' к w'', и  $\gamma_w$  — пути, идущего от w' к w. Пусть  $z=\varphi(w)$ ,  $\omega=F_{\gamma+\gamma_w}(z)$ . Соответствие между  $\omega$  и w взаимно однозначно, поэтому

 $\omega = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$ , и, следовательно,  $\varphi(w)$  остается инвариантной при найденном линейном преобразовании, которое не есть тождество, так как при w = w',  $\omega = w''$ .

[10] Аналитическая функция называется автоморфной, если существует группа линейных преобразований аргумента, оставляющих

ее инвариантной.

[11] Группа преобразований называется циклической, если она образована всеми степенями одного из ее элементов. n-ая (n > 0) степень преобразования A есть преобразование B, равное произведению

из *п* множителей *A*. Степень (— *n*) получается таким же образом из преобразования, обратного по отношению к *A*. Нулевая степень есть тождественное преобразование.

Группу, соответствующую области (114,1), легко найти пользуясь

отображением (§ 50) и преобразованием полуплоскости на круг.

[12] Для этого лучше всего воспользоваться отображением кольца на полосу, а полосу развернуть на полуплоскость преобразованием § 50.

[13] Рассуждение проводится аналогично тому, как это было сделано в примечании [6]; вместо сходящихся последовательностей чисел надо каждый раз выбирать равномерно сходящиеся последовательности

функций, что возможно вследствие нормальности свойств.

[14] В самом деле, пусть  $\overline{B}$  область, ограниченная b и  $\gamma$ ,  $\overline{B'}$  луночка, C' ее дополнение до круга. Пусть функции u=f(z), w=g(z) дают решение задач § 154 для областей  $(A+\overline{B})$  и  $(\overline{B'}+\overline{C'})$ . Обозначим соответствующие области в плоскости z через A'',  $\overline{B''}$ ,  $\overline{C''}$ , а через B'' и C'' области, в которые переходят B' и C' при отображении  $v=G(z)=\chi[g(z)]$ . Функция u=f(z) продолжаема во всю область B'', так как в области  $\overline{B''}f(z)=\psi[\chi[g(z)]$  и, очевидно, дает отображение B'' на область B. Следовательно, u=f(z), v=G(z) и области A'', B'', C'' решают задачу § 155.

СОДЕРЖАНИЕ	
	mp.
Предисловие и от переводчика	5
Исторический обзор	7
Para in the state of the state	
Глава I	
Преобразования Möbius'a	
§ 5. Общее понятие о конформном отображении	9
§ 5— 9. Преобразование Möbius'а	10
§ 10—12. Инвариантность ангармонического отношения	12
§ 13—15. Пучки окружностей	14
§ 16—22. Связки окружностей	19
§ 26 -30. Геометрия преобразований Möbius'а	21
Глава II	
Неевклидова геометрия	
§ 31-34. Инверсии относительно окружностей связки	24
§ 33. Отображение круга на самого себя	25
§ 36, 37. Неевклидова геометрия	27
§ 38—41. Угол и расстояние	28
§ 42. Теоремы о треугольнике	30
§ 43. Неевклидова длина кривой	30
§ 45. 1 содезическая кривизна	31
§ 48. Параллельные кривые	34
Глава III	
Элементарные преобразования	
§ 49—51. Показательная функция	36
§ 52, 53. Отображение прямолинейной полосы на круг	37
§ 54. Отображение круговых луночек	39
§ 55—59. Отображение римановых поверхностей	40
§ 60—61. Отображение круга на внешнюю область эллипса	42
§ 62—66. Отображение произвольной односвязной области	44
на ограниченную область	44
Глава IV	
Лемма Schwarz'a	
§ 67. Теорема Schwarz'a	50
§ 68. Теорема о единственности конформных отображений	
односвязных областей	51
§ 69. Teopema Liouville's	51

	СОДЕРЖАНИЕ	129
		Cmp.
	§ 70-73. Инвариантная формулировка леммы Schwarz'a.	52
	§ 74. Функции с положительной действительной частью	55
	§ 75. Теорема Нагласк'а	55
	§ 76. Функции с ограниченной действительной частью	56
	§ 77-79. Поверхности Riemann'a с алгебраической и лога-	
	рифмической точками ветвления	56
	§ 80-82. Отображения однолистных областей	58
	§ 83-85. Отображение друг на друга областей, содержа-	
	щих заданные круги	62
	§ 86. Задача	64
	§ 87—88. Обобщения леммы Schwarz'a	65
	§ 89—93. Теорема Julia	66
	n v	
	Глава V	
	Основные теоремы о конформных отображениях	
	§ 94. Непрерывная сходимость	71
	§ 95, 96. Предельное колебание	71
	§ 97-99. Нормальные семейства ограниченных функций.	74
	§ 100. Существование решения некоторых задач вариацион-	
	ного исчисления	76
	§ 101-103. Нормальные семейства голоморфных функций	77
	§ 104. Применение к конформным отображениям	80
	§ 105—118. Основная теорема о конформных отображениях	80
	§ 119. Нормальные семейства, образованные функциями,	
	отображающими круг на однолистные области	88
	§ 120—123. Ядро последовательности областей	89
	§ 124. Примеры	92
	§ 125—130. Одновременные отображения вложенных обла-	
- 1	стей	93
	Глава VI	
	Соответствие границ	
		00
	§ 131—133. Hepasehctbo Lindelöfa	98
	§ 134, 135. Лемма 1 о соответствии границ § 136. Лемма 2	102
	§ 137, 138. Отображение жордановых областей	102
	§ 139, 140. Инверсия относительно аналитической кривой.	104
	§ 141—145. Принцип симметрии	106
	§ 146—151. Поведение отображения в углах	109
	§ 152, 153. Конформное отображение на границе	115
	Глава VII	
	Отображение замкнутых поверхностей	
	§ 154, 155	117
	§ 156. Конформные отображения повержностей	118
	§ 157-161. Конформное отображение замкнутой поверх-	!
	ности на сферу	119
	Библиографические заметки	122
	Примечания переводчика	125
K.	Каратеодори.	9

## ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТМЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

# **СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ:**

В. Ф. КАГАН

Геометрические идеи Римана и их современное развитие

Стр. 76. Ц. 3 р. 50 к.

## А. Я. ХИНЧИН

Основные законы теории вероятностей

Стр. 84. Ц. 2 р. 50 к.

-Г. БОР

Почти периодические функции

Стр. 128. Ц. 2 р.

Акад. Н. Н. ЛУЗИН

Современное состояние теории функций действительного переменного

Стр. 60. Ц. 1 р. 25 к.

# ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:

ИНГАМ

Распределение простых чисел

хинчин

Асимптотические законы теории вероятностей

колмогоров

Основные понятия теории вероятностей

БЕНКЕ и ТУЛЛЕН

Аналитические функции нескольких переменных

**FACCE** 

Введение в высшую алгебру

Редакция С. А. Каменецкого Корректура А. Х. Артюхосой Оформление С. Л. Дыман Выпускающий Л. М. Волкович

Сдано в набор 11 апреля 1934 г. Поступило к печати 27 октября 1934 г. Формат 82 × 110. Количество бум. листов 21/16. Авторских листов 8. Колилество печ. знаков в 1 бум. листе 168960. Уполиомоченный Главлита № В-73449.

Заказ № 515. Тираж 5000 экз. Изд. № 309.

4-я тип. ОНТИ НКТП СССР «Кр. Печатник». Ленинград, Международный, 75а.



Ц. 2 р. 80 к Т 21-5-4



